
UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,

Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,

Docteur ès Sciences,
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers.

R. BRICARD,

Ingénieur des Manufactures de l'État,
Répétiteur et examinateur d'admission
à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE.

TOME VIII.

(LXVIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1908

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[E5]

PROCÉDÉ ÉLÉMENTAIRE D'APPLICATION DES INTÉGRALES DÉFINIES RÉELLES AUX ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES ET TRANSCENDANTES;

PAR M. MICHEL PETROVITCH,

à Belgrade (Serbie).

I. — SUR UNE INTÉGRALE RÉELLE DISCONTINUE.

1. Soit $\varphi(t)$ une fonction réelle pour t réel, continue dans un intervalle réel donné (a, b) et telle que l'intégrale

$$(1) \qquad g_n = \int_a^b \varphi(t) \cos nt \, dt$$

ait un sens pour toute valeur entière positive ou nulle de n.

J'envisage l'intégrale définie

$$(2) \qquad \mathrm{I}(x) = \int_a^b \varphi(t) \log(1 - 2x\cos t + x^2)\, dt,$$

qui, en vertu du développement

$$(3) \qquad \log(1 - 2x\cos t + x^2) = -2\sum_1^\infty \frac{x^n \cos nt}{n},$$

sera une fonction $\lambda(x)$ de x, donnée pour $|x|$ suffisamment petit par le développement

$$(4) \qquad \lambda(x) = -2\sum_{1}^{\infty} \frac{g_n x^n}{n},$$

ou bien par l'intégrale

$$(5) \qquad \lambda(x) = -2\int_{a}^{b} \frac{\mu(x)}{x}\,dx$$

avec

$$(6) \qquad \mu(x) = \sum_{1}^{\infty} g_n x^n.$$

Soit R le rayon de convergence de la série (6) [dont la détermination se réduit à celle de l'intégrale (1) pour n très grand]. Alors, la série (3) étant uniformément convergente pour $|x| \leqq 1$:

1° Si $R \geqq 1$, l'intégrale $I(x)$ pour $|x| < 1$ coïncidera avec la fonction $\lambda(x)$; d'autre part, l'identité

$$\log(1 - 2x\cos t + x^2) = 2\log x + \log\left(1 - \frac{2}{x}\cos t + \frac{1}{x^2}\right)$$

montre que, pour $|x| > 1$, $I(x)$ coïncidera avec la fonction

$$(7) \qquad \Omega(x) = 2g_0 \log x + \lambda\left(\frac{1}{x}\right).$$

2° Si $R < 1$, $I(x)$ coïncide avec $\lambda(x)$ pour $|x| < R$ et avec $\Omega(x)$ pour $|x| > \frac{1}{R}$.

L'intégrale $I(x)$ *est donc une fonction discontinue de* x, *coïncidant tantôt avec* $\lambda(x)$, *tantôt avec* $\Omega(x)$, *suivant que le point* x *se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur d'une certaine circonférence ou d'une certaine couronne ayant l'origine comme centre.*

2. Un cas particulièrement intéressant pour ce qui suit se présente lorsque la fonction $\varphi(t)$ et les limites a et b de l'intégrale $\mathrm{I}(x)$ sont telles que l'intégrale (1) soit constamment nulle dès que l'entier n dépasse une certaine valeur p, tandis que pour $n \leqq p$ elle soit déterminée, finie et différente de zéro. Nous dirons, dans ce cas, pour abréger, qu'une telle fonction *satisfait à la condition* $[\varphi, a, b, p]$.

Ainsi, $\varphi =$ const. satisfait à la condition

$$[\varphi, 0, 2k\pi, 0].$$

La fonction

$$\varphi = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^k \qquad (k = \text{entier positif})$$

satisfait à la condition $[\varphi, 0, \infty, k-1]$.

La fonction

$$\varphi = \left(\frac{\sin ht}{t}\right)^2 \qquad (h = \text{entier positif})$$

satisfait à la condition $[\varphi, 0, \infty, 2h-1]$.

Toute fonction continue $\varphi(t)$ admettant 2π comme période, ne s'annulant pas pour $t = 0$ et dont le développement en série trigonométrique ne contient pas de cosinus satisfait à la condition $[\varphi, 0, 2\pi, 0]$, etc.

Dans tous ces cas, la fonction $\lambda(x)$ se réduit au polynome de degré p en x

$$(8) \qquad \lambda(x) = -2\left(g_1 x + \frac{g_2}{2} x^2 + \ldots + \frac{g_p}{p} x^p\right),$$

et l'on a $\mathrm{R} = \infty$. Si, en particulier, la fonction φ satisfait à la condition $[\varphi, a, b, 0]$, on a $\lambda(x) = 0$, et, par suite,

$$(9) \qquad \mathrm{I}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |x| \leqq 1, \\ 2g_0 \log x & \text{pour } |x| > 1. \end{cases}$$

3. Dans le cas où, les limites de l'intégrale étant o et 2π, la fonction continue $\varphi(t)$ admet la période 2π, de sorte que

$$(10) \qquad \varphi(t) = A_0 + \sum_1^\infty A_n \sin nt + \sum_1^\infty B_n \cos nt,$$

on aura

$$(11) \qquad g_0 = 2\pi A_0, \qquad g_n = \pi B_n,$$

et la fonction correspondante $\lambda(x)$ peut s'écrire

$$(12) \qquad \lambda(x) = -2\pi \int_0^x \frac{\Phi(x)}{x}\, dx$$

avec

$$(13) \qquad \Phi(x) = \sum_1^\infty B_n x^n.$$

Ainsi, lorsque $\varphi(t)$ est le coefficient de i dans une expression $\psi(e^{ti})$, $\psi(z)$ étant une fonction de z holomorphe pour $|z| < 1$, on aura $A_0 = 0$, $B_n = 0$, et, par suite,

$$g_0 = 0, \qquad \lambda(x) = 0.$$

Lorsque $\varphi(t)$ est la partie réelle de $\psi(e^{ti})$, on trouve aisément

$$(14) \quad g_0 = 2\pi\psi(0), \qquad \lambda(x) = -2\pi \int_0^x \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x}\, dx,$$

et le rayon R sera au moins égal à 1. En faisant donc

$$(15) \qquad \psi(z) = -\frac{1}{2\pi} z f'(z),$$

$f(z)$ étant une fonction holomorphe pour $|z| < 1$, on aura

$$g_0 = 0, \qquad \lambda(x) = f(x),$$

ce qui donne, d'une manière bien élémentaire, une so-

lution du problème suivant :

L'intégrale $I(x)$ *étant prise entre les limites* o *et* 2π, *déterminer la fonction* $\varphi(t)$ *correspondant à une fonction* $\lambda(x)$ *donnée, holomorphe pour* $|x| < 1$.

Cette solution consisterait à prendre pour $\varphi(t)$ la partie réelle de l'expression $-\frac{1}{2\pi} z\lambda'(z)$ pour $z = e^{ti}$. La fonction $\varphi(t)$, correspondant à une fonction $\mu(t)$ donnée, serait égale à la partie réelle de $\frac{1}{\pi}\mu(e^{ti})$.

Remarquons aussi que l'intégrale $I(x)$ est égale au double de l'intégrale de la même forme, mais prise entre les limites o et π.

II. — Différence entre le nombre de zéros et de pôles d'une fonction méromorphe dans une circonférence donnée.

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe à l'intérieur et sur la circonférence d'un cercle C de rayon r, ayant l'origine comme centre, réelle pour z réel et ne s'annulant pas pour $z = 0$. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des zéros et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ ses pôles à l'intérieur de C, en supposant qu'aucun d'eux ne se trouve sur C et en comptant chaque zéro et chaque pôle autant de fois qu'indique son degré de multiplicité.

Envisageons l'intégrale définie

$$H(r) = \int_a^b \varphi(t)\, F(r, t)\, dt, \tag{16}$$

où $F(r, t)$ désigne la partie réelle de $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ pour $z = re^{ti}$.

Comme l'on peut écrire

$$(17)\qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_1^n \frac{1}{z-\alpha_k} - \sum_1^m \frac{1}{z-\beta_k} + \chi(z),$$

$\chi(z)$ étant holomorphe dans C et sur C, les identités

$$(18)\qquad \text{partie réelle de } f(re^{ti}) = \tfrac{1}{2}\left[f(re^{ti}) + f(re^{-ti})\right],$$

$$(19)\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{re^{ti}}{re^{ti}-\alpha} + \frac{re^{-ti}}{re^{-ti}-\alpha}\right) = \frac{1-\dfrac{\alpha}{r}\cos t}{1-\dfrac{2\alpha}{r}\cos t + \left(\dfrac{\alpha}{r}\right)^2}$$

conduisent à

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} F(r,t) = {} & \sum_1^n \frac{1-\dfrac{\alpha_k}{r}\cos t}{1-\dfrac{2\alpha_k}{r}\cos t + \left(\dfrac{\alpha_k}{r}\right)^2} \\ & - \sum_1^m \frac{1-\dfrac{\beta_k}{r}\cos t}{1-\dfrac{2\beta_k}{r}\cos t + \left(\dfrac{\beta_k}{r}\right)^2} + \psi(r,t), \end{aligned}\right.$$

où $\psi(r, t)$ désigne la partie réelle de $z\chi(z)$ pour $z = re^{ti}$. Par suite, on aura

$$(21)\qquad H(r) = \sum_1^n B\left(\frac{\alpha_k}{r}\right) - \sum_1^m B\left(\frac{\beta_k}{r}\right) + U(r),$$

où $B(x)$ représente l'intégrale définie

$$(22)\qquad B(x) = \int_a^b \varphi(t)\,\frac{1-x\cos t}{1-2x\cos t + x^2}\,dt,$$

et où

$$(23)\qquad U(r) = \int_a^b \varphi(t)\,\psi(r,t)\,dt.$$

Or, l'identité

$$\frac{1-x\cos t}{1-2x\cos t + x^2} = 1 - \frac{x}{2}\,\frac{d}{dx}\log(1-2x\cos t - x^2)$$

fait voir qu'en mettant à part les valeurs $|x| = 1$, on aura pour toute valeur de x

$$B(x) = g_0 - \frac{x}{2} \frac{dI}{dx}.$$

Il s'ensuit, d'après les propriétés de l'intégrale $I(x)$, que pour toute valeur de x à l'intérieur d'une certaine circonférence C_1 on aura [formules (5) et (7)]

$$B(x) = g_0 + \mu(x),$$

et, pour toute valeur de x à l'extérieur d'une certaine circonférence C_2, on aura

$$B(x) = -\mu\left(\frac{1}{x}\right),$$

$\mu(x)$ étant donnée par (6); les rayons R_1 et R_2 de C_1 et C_2 ont pour valeurs

R_1 = plus petite des valeurs 1 et R,

R_2 = plus grande des valeurs 1 et $\frac{1}{R}$,

R étant le rayon de convergence de la série (6).

Choisissons maintenant pour $\varphi(t)$ une fonction quelconque satisfaisant à la condition $[\varphi, a, b, 0]$; on aura

$$\mu(x) = 0, \qquad R = \infty,$$

et, comme les deux circonférences C_1 et C_2 coïncident alors avec C, on aura

$$B(x) = g_0 \quad \text{pour} \quad |x| < 1,$$
$$B(x) = 0 \quad \text{pour} \quad |x| > 1;$$

par suite,

$$(24) \quad \begin{cases} \sum_1^n B\left(\frac{\alpha_k}{r}\right) = ng_0, \\ \sum_1^m B\left(\frac{\beta_k}{r}\right) = mg_0. \end{cases}$$

D'autre part, la fonction $\chi(z)$ étant pour $|z| \leqq r$ développable en série

$$\chi(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots,$$

on aura

$$\psi(r, t) = 2 \sum_1^\infty b_n r^{n+1} \cos(n+1) t,$$

et, par suite,

$$(25) \qquad U(r) = 2 \sum_1^\infty b_n g_{n+1} r^{n+1} = 0,$$

de sorte que l'intégrale $H(r)$ se réduit à la valeur $(n-m) g_0$.

D'où le résultat suivant :

La différence entre le nombre des zéros et celui des pôles de $f(z)$ est égale à la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{g_0} \int_a^b \varphi(t) F(r, t) \, dt,$$

où $F(r, t)$ désigne la partie réelle de $\frac{z f'(z)}{f(z)}$ pour $z = re^{ti}$ et où $\varphi(t)$ est une fonction quelconque satisfaisant à la condition $[\varphi, a, b, 0]$.

Ainsi, par exemple, cette différence sera représentée par l'intégrale

$$\frac{1}{g_0} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} F(r, t) \, dt,$$

dans quel cas on aura

$$g_0 = \frac{\pi}{2},$$

ou bien par une intégrale quelconque de la forme

$$\frac{1}{g_0} \int_0^{2\pi} \varphi(t) F(r, t) \, dt.$$

$\varphi(t)$ étant une fonction continue, admettant 2π comme période, ne s'annulant pas pour $t=0$ et dont le développement en série de Fourier ne contient pas de cosinus; dans ce cas on aura

$$g_0 = \pi\varphi(0).$$

En prenant dans la dernière intégrale $\varphi(t)=1$ on retrouve la formule

$$n-m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(r,t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F(r,t)\,dt.$$

III. — Rapport des produits des modules des zéros et des pôles.

Considérons la fonction précédente $f(z)$ et partons de

$$(26)\quad \log\frac{f(z)}{f(0)} = \sum_1^n \log\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right) - \sum_1^m \log\left(1-\frac{z}{\beta_k}\right) + \xi(z),$$

où $\xi(z)$ sera holomorphe à l'intérieur et sur la circonférence C et s'annule pour $z=0$.

Formons l'intégrale

$$(27)\qquad K(r) = \int_a^b \varphi(t)\,M(r,t)\,dt.$$

où

$$(28)\qquad M(r,t) = \log|f(z)| \qquad \text{pour} \qquad z = re^{ti}.$$

Les identités

$$(29)\qquad M(r,t) = \tfrac{1}{2}[\log f(re^{ti}) - \log f(re^{-ti})],$$

$$(30)\quad \begin{cases} \log\left(1-\dfrac{re^{ti}}{\alpha}\right) + \log\left(1-\dfrac{re^{-ti}}{\alpha}\right) \\ \qquad = \log\left[1-\dfrac{2r}{\alpha}\cos t + \left(\dfrac{r}{\alpha}\right)^2\right] \end{cases}$$

conduisent à

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} M(r, t) = {} & \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}\log\left[1 - \frac{2r}{\alpha_k}\cos t + \left(\frac{r}{\alpha_k}\right)^2\right] \\ & - \frac{1}{2}\sum_{1}^{m}\log\left[1 - \frac{2r}{\beta_k}\cos t + \left(\frac{r}{\beta_k}\right)^2\right] \\ & + \log f(0) + \psi(r, t), \end{aligned} \right.$$

où

$$(32)\qquad \psi(r, t) = \sum_{1}^{\infty} c_n r^n \cos nt.$$

c_n désignant les coefficients du développement

$$\xi(z) = \sum_{1}^{\infty} c_n z^n,$$

convergent pour $z \leqq r$.

Par suite, l'intégrale $K(r)$ aura la valeur

$$(33)\quad \left\{ \begin{aligned} K(r) = {} & \frac{1}{2}\sum_{1}^{n} I\left(\frac{r}{\alpha_k}\right) - \frac{1}{2}\sum_{1}^{m} I\left(\frac{r}{\beta_k}\right) \\ & + \log f(0)\int_a^b \varphi(t)\,dt \\ & + \int_a^b \varphi(t)\,\psi(r, t)\,dt. \end{aligned} \right.$$

Choisissons maintenant pour $\varphi(t)$ une fonction quelconque satisfaisant à la condition $[\varphi, a, b, 0]$; les formules (9) montrent que

$$(34)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{1}^{n} I\left(\frac{r}{\alpha_k}\right) &= 2g_0 \log\frac{r^n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}, \\ \sum_{1}^{m} I\left(\frac{r}{\beta_k}\right) &= 2g_0 \log\frac{r^m}{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}, \end{aligned} \right.$$

et comme, en vertu de (32), on a

$$(35)\qquad \int_a^b \varphi(t)\psi(r,t)\,dt = \sum_1^{\infty} c_n g_n r^n = 0,$$

la valeur de $K(r)$ se réduit à

$$(36)\qquad K(r) = g_0 \log\left[f(0)\, r^{n-m}\frac{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right].$$

En égalant à $K(r)$ la partie réelle du second membre de (36), on est conduit au résultat suivant :

Quelle que soit la fonction $\varphi(t)$ satisfaisant à la condition $[\varphi, a, b, 0]$, et $M(r, t)$ désignant le logarithme du module de $f(z)$ le long du cercle de rayon r, l'intégrale définie

$$K(r) = \int_a^b \varphi(t) M(r, t)\,dt$$

aura pour valeur

$$(37)\qquad g_0 \log\left| f(0)\, r^{n-m}\frac{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right|.$$

Tel est, par exemple, le cas de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} M(r, t)\,dt,$$

ou d'une intégrale quelconque de la forme

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t) M(r, t)\,dt,$$

$\varphi(t)$ étant une fonction continue à période 2π à laquelle correspondrait le développement

$$\varphi(t) = A_0 + A_1 \sin t + A_2 \sin 2t + \ldots.$$

En prenant dans ce dernier cas

$$A_0 = 1, \qquad A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = 0,$$

on retrouve le théorème de M. Jensen pour le cas où $f(z)$ est réel pour z réel.

IV. — Fonctions symétriques et asymétriques des zéros.

1. Soit $f(z)$ un polynome en z de degré n et envisageons l'intégrale précédente

$$K(r) = \int_a^b \varphi(t)\, M(r, t)\, dt.$$

Les identités (29), (30) et

(38) $$\log\frac{f(z)}{f(0)} = \sum \log\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right)$$

conduisent directement à

(39) $$K(r) = \frac{1}{2}\sum_1^n I\left(\frac{r}{\alpha_k}\right) + g_0 \log f(0).$$

Or, d'après les propriétés de l'intégrale $I(x)$, si α_1, α_2, ..., α_m sont les zéros de $f(z)$ compris à l'intérieur de la circonférence c de rayon r, et α_{m+1}, α_{m+2}, ..., α_n ses zéros à l'extérieur de c, on aura pour $k = 1, 2, \ldots, m$

(40) $$\sum I\left(\frac{r}{\alpha_k}\right) = 2 g_0 \log\frac{r^n}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} + \sum \lambda\left(\frac{\alpha_k}{r}\right)$$

et pour $k = m + 1, \ldots, n$

(41) $$\sum I\left(\frac{r}{\alpha_k}\right) = \sum \lambda\left(\frac{r}{\alpha_k}\right),$$

de sorte que

$$(42)\quad \begin{cases} K(r) = \displaystyle\sum_{(1)} \lambda\left(\frac{\alpha_k}{r}\right) \\ \qquad + \displaystyle\sum_{(2)} \lambda\left(\frac{r}{\alpha_k}\right) + 2g_0 \log \frac{r^n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} + g_0 f(0), \end{cases}$$

la somme $\sum_{(1)}$ étant rapportée aux zéros intérieurs et $\sum_{(2)}$ aux zéros extérieurs. *On a ainsi une fonction asymétrique des α_i exprimée à l'aide de l'intégrale* $K(r)$.

En prenant pour r une limite inférieure γ des modules des α_i, la somme $\sum_{(2)}$ et le terme logarithmique disparaissent dans le second membre de (42) et cette formule se réduit à

$$(43)\qquad K(\gamma) = \sum \lambda\left(\frac{\gamma}{\alpha_k}\right) + g_0 \log f(0),$$

exprimant, ainsi, une fonction symétrique des α_i à l'aide de $K(r)$.

2. Les fonctions symétriques et asymétriques des α_i peuvent aussi s'exprimer par l'intégrale précédente

$$H(r) = \int_a^b \varphi(t) F(r, t)\, dt.$$

En partant de la formule (21) qui se réduit ici à

$$(44)\qquad H(r) = \sum_1^n B\left(\frac{\alpha_k}{r}\right)$$

et en remarquant que si l'on suppose le rayon de convergence R de la série correspondante

$$\mu(x) = \sum_1^\infty g_n x^n$$

au moins égal à 1 on a

$$B(x) = g_0 - \mu(x) \qquad \text{pour} \qquad |x| < 1,$$

$$B(x) = -\mu\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{pour} \qquad |x| > 1,$$

on arrive à la formule

$$(45) \qquad H(r) = ng_0 + \sum_{(1)} \mu\left(\frac{\alpha_k}{r}\right) - \sum_{(2)} \mu\left(\frac{r}{\alpha_k}\right),$$

exprimant une fonction asymétrique des α_i *par l'intégrale* $H(r)$.

En prenant $r = \gamma$ on aurait *la fonction symétrique*

$$(46) \qquad \sum \mu\left(\frac{\alpha_k}{\gamma}\right),$$

étendue à tous les α_i, *exprimée à l'aide de* $H(r)$.

En choisissant pour $\varphi(t)$ une fonction quelconque satisfaisant à la condition $[\varphi, a, b, p]$, où p est un entier positif, la fonction $\mu(x)$ sera un polynome en x, la somme $\sum \mu\left(\frac{r}{\alpha_k}\right)$ étendue à tous les α_i se calculerait à l'aide des coefficients de $f(z)$, et l'on aura *la fonction symétrique*

$$\sum \left[\mu\left(\frac{\alpha_k}{r}\right) + \mu\left(\frac{r}{\alpha_k}\right)\right],$$

étendue aux α_i *intérieurs à* c, exprimée à l'aide de $H(r)$ et des coefficients de $f(z)$.

3. On peut encore exprimer les fonctions symétriques et asymétriques des α_i par l'intégrale

$$(47) \qquad L(r) = \int_a^b \varphi(t)\,\Phi(r, t)\,dt,$$

où $\Phi(r, t)$ désigne la partie réelle de la dérivée logarithmique de $f(z)$ le long de la circonférence C; on

trouve aisément

$$L(r) = \frac{1}{r}\sum A\left(\frac{\alpha_k}{r}\right)$$

avec

$$A(x) = -\frac{1}{2}\frac{dI}{dx},$$

ce qui conduit à la formule

$$(48) \qquad L(r) = \sum_{(1)} \frac{1}{\alpha_k}\mu\left(\frac{\alpha_k}{r}\right) - \sum_{(2)}\left[\frac{g_0}{\alpha_k} + \frac{1}{\alpha_k}\mu\left(\frac{r}{\alpha_k}\right)\right],$$

exprimant une fonction asymétrique des α_i *par* $L(r)$.
On en tire aussi la formule

$$(49) \qquad L(\gamma) = -\sum\left[\frac{g_0}{\alpha_k} + \frac{1}{\alpha_k}\mu\left(\frac{r}{\alpha_k}\right)\right],$$

exprimant une fonction symétrique des α_i *par* $L(r)$.

En prenant pour $\varphi(t)$ une fonction quelconque satisfaisant à la condition $[\varphi, a, b, o]$, *l'intégrale*

$$(50) \qquad -\frac{1}{g_0}L(r)$$

aura pour valeur la somme des inverses des α_i *extérieurs à la circonférence* C; en appliquant la proposition au polynome

$$z^n f\left(\frac{1}{z}\right),$$

l'expression correspondante (50) *aura pour valeur la somme des* α_i *intérieurs à c*.

Remarquons aussi, pour terminer, que la plupart de ces résultats s'appliquent manifestement encore aux cas où $f(z)$ est une fonction transcendante entière du genre zéro et conduisent, entre autres conséquences, à diverses formules sommatoires connues ou nouvelles.

[K8f]

SUR LES QUADRANGLES DE DESBOVES;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. Considérons un quadrangle ABCD, et posons

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c,$$
$$DA = d, \quad AC = e, \quad BD = f.$$

D'une part, les quatre triangles que l'on obtient en supprimant l'un ou l'autre des quatre points A, B, C, D ont respectivement pour côtés

$$fbc, \quad ecd, \quad fda, \quad eab.$$

D'autre part, les trois couples de côtés opposés du quadrangle sont

$$a \text{ et } c, \qquad b \text{ et } d, \qquad e \text{ et } f.$$

2. La relation qui a lieu entre les longueurs des six côtés d'un quadrangle a été établie par Carnot au moyen de celle qui a lieu entre les cosinus de trois angles liés par l'une des relations $\lambda \pm \mu \pm \nu = 2k\pi$. On peut lui donner la forme très symétrique

$$\begin{aligned} & a^2c^2(e^2+f^2+b^2+d^2-a^2-c^2) \\ + & b^2d^2(e^2+f^2+a^2+c^2-b^2-d^2) \\ + & e^2f^2(a^2+c^2+b^2+d^2-e^2-f^2) \\ - & (f^2b^2c^2+e^2c^2d^2+f^2d^2a^2+e^2a^2b^2) = 0. \end{aligned}$$

3. On peut écrire

$$\begin{aligned} & (a^2+c^2)(b^2d^2+e^2f^2-a^2c^2)+\ldots+\ldots \\ & \quad -(f^2b^2c^2+e^2c^2d^2+f^2d^2a^2+e^2a^2b^2) = 0, \end{aligned}$$

d'où, en complétant le carré dans la seconde ligne,

$$(a^2+c^2)\,[(bd+ef)^2-a^2c^2]+\ldots+\ldots$$
$$-(fbc+ecd+fda+eab)^2=0,$$

ou enfin

$$(ac+bd+ef)\,[(a^2+c^2)(bd+ef-ac)+\ldots+\ldots]$$
$$-(fbc+ecd+fda+eab)^2=0.$$

La relation de Carnot ayant lieu entre les carrés des longueurs des six côtés du quadrangle, nous pouvons changer par exemple e en $-e$, ce qui donne (en multipliant par -1) :

$$(ac+bd-ef)\begin{bmatrix}(a^2+c^2)(ac-bd+ef)\\+(b^2+d^2)(bd-ac+ef)\\-(e^2+f^2)(ef+ac+bd)\end{bmatrix}$$
$$+(fbc-ecd+fda-eab)^2=0.$$

4. Dès lors, si les côtés d'un quadrangle satisfont à la relation

$$(1)\qquad fbc-ecd+fda-eab=0,$$

ils satisfont à l'une ou à l'autre des deux relations

$$(2)\qquad ac+bd-ef=0,$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}&(a^2+c^2)(ac-bd+ef)\\&+(b^2+d^2)(bd-ac+ef)\\&-(e^2+f^2)(ef+ac+bd)=0,\end{aligned}\right.$$

et réciproquement.

Sauf la forme très symétrique que nous donnons ici à la relation (3), le résultat précédent appartient à Desboves, qui l'a énoncé sans démonstration (*Nouvelles Annales*, 1877, p. 227); Desboves écrit l'hypothèse sous la forme

$$(1')\qquad \frac{e}{f}=\frac{da-bc}{dc+ab},$$

et la conclusion sous la forme

$$(2') \qquad ef = ac + bd,$$

ou bien

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} &(a^2 + c^2 + b^2 + d^2 - e^2 - f^2)(ac + bd + ef) \\ &\qquad\qquad - 2(da + bc)(dc + ab) = 0. \end{aligned} \right.$$

M. Moret-Blanc (*N. A.*, 1878, p. 263) a justifié l'énoncé de Desboves en vérifiant que la relation de Carnot, prise sous forme non symétrique, peut s'écrire

$$\begin{aligned} &(ac + bd - ef) \times \varphi(a, b, \ldots) \\ &\qquad + [e(dc + ab) - f(da + bc)]^2 = 0, \end{aligned}$$

φ étant le premier nombre de la relation (3'); j'ai conservé le principe de cette démonstration.

5. L'hypothèse étant prise sous la forme (1'), le calcul suivant n'est pas sans intérêt. Désignons par k la quantité $\dfrac{da + bc}{dc - ab}$. La relation de Carnot, transformée par l'hypothèse $e = kf$, devient

$$\begin{aligned} &-k^2(k^2 + 1)f^6 + k^2 f^4(a^2 + c^2 + b^2 + d^2) + \ldots \\ &\qquad - (a^2c^2 - b^2d^2)(a^2 + c^2 - b^2 - d^2) = 0, \end{aligned}$$

et cette relation est certainement satisfaite si l'on a (cas du quadrangle inscriptible)

$$kf.f = ac + bd;$$

le premier membre de cette relation est donc divisible par $kf^2 - (ac + bd)$, et le quotient, calculé avec les seuls termes que l'on a écrits, est

$$\begin{aligned} &-k^2(k^2 + 1)f^4 + kf^2(a^2 + c^2 + b^2 + d^2) - (k^2 - 1)f^2(ac - bd) \\ &\qquad + (ac - bd)(a^2 + c^2 - b^2 - d^2); \end{aligned}$$

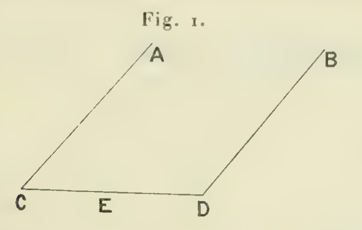
en remplaçant kf par e, et en égalant à zéro, on trouve la relation (3) sous la forme

$$ef(a^2 + c^2 + b^2 + d^2 - e^2 - f^2) - (ac + bd)(e^2 - f^2)$$
$$+ (ac - bd)(a^2 - c^2 - b^2 - d^2) = 0;$$

il suffit de grouper les termes en $a^2 + c^2$, $b^2 + d^2$, $e^2 + f^2$, pour obtenir la forme (3).

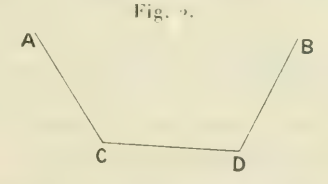
6. Un quadrangle étant supposé inscriptible à un cercle, et l'ordre des sommets sur la circonférence étant A, B, C, D, de sorte que les côtés croisés sont AC

Fig. 1.



et BD, si l'on applique à chacun des quatre triangles de la figure la relation classique $abc = 4RS$, on obtient la relation (1) sous cette forme même.

Fig. 2.



La réciproque n'est exacte qu'à la condition de considérer seulement des quadrangles pour lesquels le contour ABCD est convexe; l'hypothèse (1) entraîne alors la conséquence (2).

En dehors de ce cas, l'hypothèse (1) entraîne la conséquence (3), et l'on a ce que je propose d'appeler un *quadrangle de Desboves*.

Voici des exemples de tels quadrangles. Si l'on suppose $e = f$ dans la relation (1'), on a $(d - b)(c - a) = 0$, et nous prendrons par exemple $b = d$. Avec la relation (2'), on a un trapèze isoscèle avec ses diagonales, les diagonales étant e et f. Avec la relation (3), on peut avoir un trapèze isoscèle avec ses diagonales, les diagonales étant b et d, ou un parallélogramme avec ses diagonales a, c.

[M²1b]

NOTE SUR UN ARTICLE PRÉCÉDENT;

Par M. G. FONTENÉ.

Voici quelques modifications à l'article que j'ai donné récemment sur les formules de Salmon analogues aux formules de Plücker.

A la page 442, on doit écrire simplement

$$2(b' - \delta) = (n' - a)(n' + a - 9)$$

sans transformer le second membre.

A la page 447, on doit calculer b' au moyen de la formule précédente; comme on connaît n' par la formule (8), on a immédiatement

$$2b' = 2\delta + [a(n-2) - \rho - 3\sigma][an - 9 - \rho - 3\sigma] = \ldots$$

A la page 446, j'ai déduit δ de la première relation (B), et c'est bien ainsi qu'il convient de faire, en vue du second membre de la formule ci-dessus qui doit prendre la forme

$$2b' = a \times \overline{(n-2)(n^3 - n^2 + n - 12)} - \ldots;$$

mais alors, au bas de la page 445, j'aurais dû dire que j'emploierais la première relation (B) et non la première relation (B_1).

[$L^2$10a]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES QUADRIQUES HOMOFOCALES [1];

PAR M. R. BRICARD.

I. Je démontrerai tout d'abord le théorème suivant :

Soient (P), (Q) *deux quadriques,* D *et* E *deux droites fixes, tangentes communes à ces deux quadriques. Les quadriques du faisceau tangentiel déterminé par* (P) *et* (Q) *déterminent sur* D *et* E *des divisions homographiques.*

Soit en effet

$$P + \gamma Q = 0$$

l'équation de l'une des quadriques (R) du faisceau considéré. (R) coupe D en deux points m et n, dont les distances à une origine fixe, choisie sur D, sont les racines d'une équation du second degré

$$A\mu^2 + 2B\mu + C = 0, \tag{1}$$

où A, B, C sont fonctions de λ. Ces fonctions sont linéaires. En effet, si l'on se donne μ, c'est-à-dire le point m par exemple, il existe dans le faisceau une quadrique unique contenant ce point.

De même la quadrique (R) coupe la droite E en

---

[1] L'original de cet article a paru en langue Esperanto, dans la revue *Internacia Scienca Revuo* (janvier 1907).

deux points m' et n' dont les distances à une origine fixe choisie sur E sont les racines d'une équation du second degré

$$(2) \qquad A'\mu'^2 + 2B'\mu' + C' = 0,$$

où A', B', C' sont des fonctions linéaires de λ.

L'équation (1) a une racine double si λ vérifie la condition

$$(3) \qquad B^2 - AC = 0.$$

Les racines de cette équation sont les valeurs de λ telles que la quadrique (R) touche la droite D. Mais par hypothèse (P) et (Q) touchent cette droite. Les racines de (3) sont donc 0 et ∞. On a, par suite, l'identité

$$B^2 - AC = K\lambda,$$

où K est une constante. On peut évidemment supposer cette constante égale à l'unité (sinon l'on multiplierait les coefficients A, B, C par un facteur convenable). Écrivons donc

$$B^2 - AC = \lambda.$$

Par le même raisonnement on trouve

$$B'^2 - A'C' = \lambda.$$

On a ensuite, en résolvant les équations (1) et (2),

$$\mu = \frac{-B + \sqrt{\lambda}}{A}, \qquad \mu' = \frac{-B' + \sqrt{\lambda}}{A'},$$

en choisissant par exemple le signe + devant chacun des radicaux qui figurent dans les expressions de μ et de μ'. L'élimination de $\sqrt{\lambda}$ entre les deux relations précédentes donne

$$A\mu + B = A'\mu' + B',$$

ou

$$\mu' = \frac{A\mu + B - B'}{A'}.$$

μ' est donc fonction rationnelle de μ et de λ. Mais λ lui-même est fonction rationnelle de μ; μ' est donc fonction rationnelle de μ. De même μ est fonction rationnelle de μ'. Il existe donc entre μ et μ' une relation homographique. C. Q. F. D.

II. Le théorème corrélatif du théorème précédent est le suivant :

Soient (P) et (Q) *deux quadriques*, D *et* E *deux droites fixes, tangentes communes à ces deux quadriques. Les plans tangents menés par* D *et* E *aux quadriques du faisceau tangentiel déterminé par* (P) *et* (Q) *engendrent deux faisceaux homographiques.*

Supposons en particulier que le faisceau tangentiel considéré contienne l'ombilicale. Le faisceau devient alors un système de quadriques homofocales. Dans les deux faisceaux de plans tangents menés par D et E aux quadriques du système, les plans isotropes se correspondent. Les deux faisceaux sont donc *égaux* et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Soient (P) *et* (Q) *deux quadriques homofocales*, D *et* E *deux droites fixes tangentes communes à ces deux quadriques. Les plans tangents menés par* D *et* E *aux diverses quadriques homofocales à* P *et* Q *engendrent deux faisceaux égaux.*

On peut dire aussi que, *si une droite* D *varie en touchant toujours* (P) *et* (Q), *les plans tangents menés par* D *aux diverses quadriques homofocales à* (P) *et* (Q) *forment un faisceau de grandeur constante.*

En particulier les plans tangents menés par D à (P) et à (Q) forment un dièdre de grandeur constante. Ce dièdre est en effet droit, comme il est bien connu. Notre proposition fournit ainsi une généralisation de ce théorème classique.

III. Supposons en particulier que D varie en touchant constamment la courbe commune à (P) et à (Q), c'est-à-dire une ligne de courbure de (P). Nous obtenons ce résultat :

Si l'on mène par une tangente variable à une ligne de courbure d'une quadrique (P) *des plans tangents aux diverses quadriques homofocales à* (P), *ces plans tangents forment un faisceau de grandeur constante.*

Plus particulièrement encore, les deux plans tangents menés à une même quadrique homofocale à (P) forment un dièdre de grandeur constante. Ce dernier théorème avait été obtenu par Mannheim, au cours de ses importantes recherches sur la surface de l'onde, et par des considérations entièrement différentes de celles qui précèdent [1].

IV. On obtient encore une conséquence intéressante en supposant que D varie en engendrant une surface développable dont l'arête de rebroussement appartient à (P). Cette arête de rebroussement est une ligne géodésique de (P), comme l'on sait. Une telle ligne géodésique jouit donc de la même propriété que les lignes de courbure, c'est-à-dire que :

Si l'on mène par une tangente variable à une

---

[1] *Proceedings of the Royal Society*, 1881; *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 435.

ligne géodésique d'une quadrique (P) *des plans tangents aux diverses quadriques homofocales à* (P), *ces plans forment un faisceau de grandeur constante.*

Ce théorème fournit une nouvelle interprétation de l'intégrale première de l'équation différentielle que vérifient les lignes géodésiques. Il est équivalent au célèbre théorème de Joachimsthal, relatif à ces lignes [1].

Il peut sembler étrange que les résultats établis dans cette Note ne soient pas connus. Mais je ne les ai rencontrés nulle part.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1907).

SOLUTION DE LA QUESTION DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL [2];

Par M. C. CLAPIER.

1° Soit M(x, y, z) un point quelconque de la surface S; désignons par (p, q, -1) les coefficients directeurs du point tangent en ce point. Les aires du triangle OMP et OMQ ont pour valeurs respectives

$$\frac{px+qy-z}{2p}\sqrt{y^2+z^2} \quad \text{et} \quad \frac{px+qy-z}{2q}\sqrt{z^2+x^2},$$

---

[1] *Voir*, par exemple : SALMON, *Géométrie à trois dimensions*, Chap. XII.

[2] *Voir* l'énoncé page 328.

si donc, on laisse de côté les cônes de sommet O′, qui satisfont à l'équation

$$px + qy - z = 0,$$

il reste, pour déterminer les surfaces cherchées, la double équation aux dérivées partielles du premier ordre.

$$(1) \qquad 0 = p\sqrt{x^2 - z^2} + \varepsilon q \sqrt{y^2 + z^2} \begin{cases} \varepsilon = +1 & (E_1), \\ \varepsilon = -1 & (E_2). \end{cases}$$

Les caractéristiques de l'une de ces surfaces sont données par le système

$$(2) \qquad \frac{dx}{\sqrt{x^2 - z^2}} = \frac{dy}{\varepsilon\sqrt{y^2 + z^2}} = \frac{dz}{O};$$

et comme $\varepsilon^2 = 1$, les équations finies de ces courbes pourront s'écrire, avec les constantes a et b,

$$(3) \qquad \frac{x + \sqrt{x^2 + z^2}}{y - \varepsilon\sqrt{y^2 + z^2}} = a, \qquad z = b.$$

Les familles de cette congruence nous donnent les équations finies des surfaces S, que l'on peut écrire

$$\frac{x + \sqrt{x^2 + z^2}}{y + \varepsilon\sqrt{y^2 + z^2}} = \text{fonct.}\,(z) \begin{cases} \varepsilon = +1 & (S_1), \\ \varepsilon = -1 & (S_2). \end{cases}$$

Dans le cas où ces surfaces sont algébriques, à coefficients réels, l'équation précédente rendue entière ne contiendra plus ε et nous n'aurons qu'une seule forme en x, y, z avec des coefficients rationnels ; il sera donc possible de passer d'une surface S_1 à une surface S_2 par une variation continue des coefficients qui entrent dans la première.

Rendons entière l'équation (3), homogène en x, y, z;

nous avons, à l'aide de calculs faciles,

$$(4)\quad \begin{matrix} X = \sqrt{x^2 + z^2} \\ Y = \sqrt{y^2 + z^2} \end{matrix} \Bigg\} \; 2x(x+X) - 2a^2y(y-\varepsilon Y) = (a^2-1)z^2,$$

$$\frac{x - X}{a} = \frac{y + \varepsilon Y}{1} = \frac{(a^2-1)z^2}{2a(x - ay)},$$

et formant

$$X^2 - Y^2 = x^2 - y^2,$$

il vient

$$(5)\qquad x^2 + y^2 - \frac{a^2+1}{a}xy = \left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2 z^2.$$

Cette équation du deuxième degré représente soit une surface S_1, soit une surface S_2, lorsqu'on prend pour a une fonction arbitraire de z; la trace sur le plan xOy de l'une de ces surfaces ne peut donc être que le système des deux droites

$$(6)\qquad x^2 + y^2 - 2\lambda xy = 0, \qquad \lambda = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right).$$

2° Prenons pour fixer les idées une caractéristique γ de l'équation (E_1), déterminée par les paramètres a et b; de sorte que

$$a = \frac{x + \sqrt{x^2 + b^2}}{y - \sqrt{y^2 + b^2}}$$

est un nombre donné positif. Par suite λ, d'après sa valeur (6), est un nombre plus grand que l'unité; l'équation (5) s'écrit à l'aide de cette nouvelle constante

$$(7)\qquad x^2 + y^2 - 2\lambda xy - (\lambda^2 - 1)z^2 = 0.$$

Elle représente le cône ayant pour sommet l'origine et pour base la caractéristique. Les directions de plans des sections circulaires de ce cône Γ s'obtiendront à

l'aide des racines de l'équation en S, qui sont :

$$s_1 = 1 - \lambda^2, \qquad s_2 = 1 - \lambda, \qquad s_3 = 1 + \lambda. \tag{8}$$

La racine moyenne s_2 nous donne les plans réels

$$(9) \quad \begin{cases} x - y + z\sqrt{\lambda - 1} & (\pi), \\ x - y - z\sqrt{\lambda - 1} & (\pi'). \end{cases}$$

Soit $M(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace; le cône T qui passe par ce point correspond à la valeur

$$a = \frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 + z_0^2}}{y_0 + \sqrt{y_0^2 - z_0^2}} \qquad \text{ou} \qquad \lambda = \frac{a - 1}{2a};$$

les droites D et D' qui passent par ce point sont les normales aux plans π et π' du système (9).

La valeur minimum que puisse prendre le paramètre réel λ est 1 ; elle a lieu pour $a = 1$, auquel cas $x_0 = y_0$. Ainsi, lorsque le point M se trouve dans le plan bissecteur du premier trièdre des coordonnées d'arête Oz, $\lambda = 1$ et les droites D et D' coïncident avec la normale à ce plan bissecteur.

On aurait pu obtenir plus simplement ce résultat en cherchant la condition pour que le cône (7) soit de révolution; il ne peut le devenir qu'en se réduisant à un plan double (B).

Prenons un contour plan fermé C ne se coupant pas et ne rencontrant aucun des axes Ox et Oy; lorsque M décrira ce contour, a, et par suite λ, ne pourra devenir ni nul ni infini. Si le contour C ne rencontre pas le plan bissecteur (B), $\lambda - 1$ variera d'une manière continue sans jamais s'annuler, et les droites D et D' dont la direction est déterminée par le système (9) se déplaceront d'une manière continue, sans pouvoir s'échanger l'une dans l'autre; la position finale de

l'une d'elles coïncidera avec sa position initiale; leurs traces P et P′ sur un plan parallèle à celui du contour C décriront, en général, deux courbes fermées distinctes. L'une de ces traces pourra cependant aller à l'infini.

Si l'on suppose que le contour C rencontre le plan (B), il le rencontrera un nombre pair de fois; de sorte que, bien que chaque fois il y ait échange des droites D et D′ l'une dans l'autre, nous reviendrons au point de départ avec la même situation; mais les traces P et P′ auront été confondues $2n$ fois et les deux courbes fermées qu'elles décriront ne seront plus distinctes; elles se traverseront $2n$ fois et formeront $2n+1$ boucles.

Remarque. — Nous avons supposé que nous prenions un cône Γ correspondant à une caractéristique de l'équation (E_1). Si nous avions pris le cône (7) qui correspond à l'équation (E_2), il aurait fallu supposer λ négatif et < -1; la racine moyenne de l'équation en S serait alors s_3 et les deux droites D et D′ coïncideraient lorsque M traverse le deuxième plan bissecteur du dièdre Oz.

3° Sur une surface S, les caractéristiques γ sont dans des plans parallèles au plan des xy et vérifient l'équation

$$p\,dx + q\,dy = 0;$$

les lignes conjuguées L de ces caractéristiques sont données par l'équation

$$\delta p\,dx + \delta q\,dy = 0;$$

on a donc sur chacune d'elles

$$\frac{\delta p}{p} = \frac{\delta q}{q},$$

d'où

$$q = p \cdot \alpha.$$

et utilisant l'équation (1), il vient, sous forme finie,

$$(10) \qquad x^2 - z^2 = \alpha^2(y^2 + z^2) \qquad (\alpha \text{ const.}).$$

Cette équation représente les cônes du second degré qui joignent l'origine aux lignes L; le lieu de ces courbes assujetties à passer par un point M est le cône (10) qui passe par ce point.

Prenons une surface S_1 et une surface S_2 d'équation respective

$$(11) \qquad \frac{x + X}{y + Y} = f, \qquad \frac{x + X}{y - Y} = f_1.$$

f et f_1 fonctions de z, la première étant positive et la seconde négative. Pour que ces deux surfaces se coupent suivant une ligne L, il faut et il suffit que leur courbe d'intersection soit située sur le cône (10); nous avons donc à éliminer x, y, z, X, Y entre les équations homogènes (4), (10) et (11). L'élimination peut se faire de la manière suivante : calculer X et Y à l'aide de (11)

$$X = \frac{2ff_1 y - (f + f_1)x}{f + f_1},$$

$$Y = \frac{(f_1 - f)y}{f + f_1},$$

et remarquons que l'équation (10) s'écrit

$$X = \alpha Y;$$

nous déduisons

$$x(f + f_1) = [2ff_1 - \alpha(f - f_1)]y.$$

D'autre part,

$$Y^2 = y^2 + z^2$$

nous permet de calculer z^2,

$$z^2(f + f_1)^2 = -4ff_1 y^2.$$

et si l'on porte dans l'équation (10), nous trouverons la condition

$$(12) \qquad ff_1 + \alpha(f - f_1) = 1.$$

Si l'on se donne une famille de surfaces S_1, déterminée par une forme positive f, ce qui revient à supposer que l'on puisse résoudre l'équation générale

$$0 = \varphi(a, z)$$

par rapport au terme

$$a = \frac{x + \sqrt{x^2 + z^2}}{y + \sqrt{y^2 + z^2}},$$

nous pouvons trouver une famille de surfaces S_2, telle que toute surface de la première coupe toute surface de la seconde suivant une ligne L; il suffira de prendre

$$f_1 = \frac{1 - \alpha f}{f - \alpha}.$$

Le problème est possible d'une infinité de manières, puisque α est une constante arbitraire.

Fixant arbitrairement une surface de la famille F, ce qui revient à se donner f, nous obtenons une infinité de surfaces de la famille F_1 qui coupent la première suivant les lignes conjuguées de ces caractéristiques.

4° Nous avons

$$A = \sqrt{y^2 + z^2}, \qquad B = \sqrt{z^2 + x^2},$$
$$dy\,dz = d\sigma \cos\alpha, \qquad dz\,dx = d\sigma \cos\beta,$$

et l'intégrale I peut s'écrire

$$I = \int\int \frac{dy\,dz}{\sqrt{y^2 + z^2}} \pm \frac{dz\,dx}{\sqrt{z^2 + x^2}}.$$

Prenons pour trajectoire venant percer Σ, la caractéristique γ appartenant à l'équation (E_1); nous au-

rons

$$I = -\int\int dz\left(\frac{dx}{\sqrt{x^2+z^2}} - \frac{dy}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)$$

avec le choix du signe.

Découpons Σ à l'aide de plans parallèles au plan des xy; nous avons, en supposant z constant,

$$I = -\int \log\left(\frac{x+\sqrt{x^2+z^2}}{y+\sqrt{y^2+z^2}}\right) dz.$$

Or, en deux points correspondants pris sur une même caractéristique, l'élément différentiel de cette intégrale reste le même; donc I ne dépend pas de la fonction Σ qui sert de support aux caractéristiques; il faudra cependant que A et B ne soient ni nuls ni infinis, ce qui exige que la tangente à la caractéristique, $\tang\varphi = \frac{A}{B}$, soit comprise entre deux limites positives ε et L; cela étant

$$I = \int_{z_0}^{l} \log\left(\frac{x+X}{y+Y}\right) dz$$

ou bien

$$(13) \qquad I = \int_{z_0}^{l} (u-v)\,dz \qquad \begin{cases} u = \operatorname{arc\,sh} \dfrac{x}{z}, \\ v = \operatorname{arc\,sh} \dfrac{y}{z} \end{cases}$$

et, intégrant par parties,

$$I = [zu + xu_1 - (zv + yv_1)]_{z_0}^{l}.$$

Soit une surface Σ, dont l'élément placé au point $M(x, y, z, p, q)$ a pour valeur

$$d\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

Faisons la perspective de ces éléments en prenant le point O comme pôle et pour plan du tableau le plan

parallèle au plan xOy mené par le point M; la section droite du petit cône de sommet O et de base $d\sigma$ a pour valeur

$$\frac{px+qy-z}{\text{OM}.\sqrt{1+p^2+q^2}}\,d\sigma;$$

il en résulte que l'aire de la perspective a pour expression

$$\frac{px+qy-z}{z}\,dx\,dy.$$

Soit maintenant une surface fixe Σ'_0, telle qu'en chacun de ses points passe une caractéristique, de sorte qu'on peut la supposer définie à l'aide des paramètres qui définissent la caractéristique γ.

Soit M_0 le point correspondant au point M; si nous écrivons que les aires des deux perspectives de $d\sigma$ et $d\sigma_0$ sont sur un plan parallèle au plan Oxy, mené par MM_0, nous obtenons l'équation

$$px+qy = p_0x_0+q_0y_0 = \text{fonct.}(a, b).$$

De sorte que les surfaces Σ satisfont à l'équation aux dérivées partielles

$$(14)\qquad px+qy = \varphi(a, z),$$

a fonction homogène en x, y, z de degré zéro.

Les caractéristiques de cette nouvelle équation sont données par un système différentiel intégrable par quadratures.

BIBLIOGRAPHIE.

Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes, par *W. Rouse Ball.* 2e édition française, traduite d'après la quatrième édition anglaise et enrichie de nombreuses additions, par *J. Fitz-Patrick.* Première Partie : Arithmétique, Algèbre et Théorie des nombres. 1 vol. in-8 (23-16). 356 pages. Paris, A. Hermann, 1907. Prix : 5fr.

Les *Récréations mathématiques* de M. Rouse Ball sont connues depuis d'assez longues années déjà et ont obtenu le plus légitime succès. Mais c'est presque un Ouvrage nouveau dont nous avons à parler aujourd'hui. Lors de la première publication, elles parurent en un seul volume, qui fut bientôt traduit en français. Les développements qui sont venus s'ajouter depuis lors ont conduit à scinder l'œuvre en deux Parties; et, comme on vient de le voir, c'est la première Partie seule dont la traduction française nouvelle est livrée au public.

Elle se compose de quatre Chapitres. Le premier, intitulé *Histoire des nombres,* nous fait connaître sur les quatorze premiers nombres des particularités historiques ou légendaires, des remarques superstitieuses et souvent des propriétés curieuses démontrées en passant. Il se termine par quelques mots sur le nombre géométrique de Platon et par d'utiles remarques sur certaines simplifications possibles dans les opérations arithmétiques.

Les Chapitres II et III traitent de *Quelques questions d'Arithmétique et d'Algèbre.* Beaucoup d'emprunts (l'auteur l'annonce) ont été faits aux *Problèmes plaisants et délectables* de Bachet et aux *Récréations mathématiques et physiques* d'Ozanam. On y trouve de nombreux exemples relatifs à la divination d'un nombre pensé, d'un résultat d'opérations faites sur un nombre inconnu, à des questions comprenant deux nombres, ou plusieurs, à des problèmes

effectués avec des séries d'objets numérotés (jeux de cartes notamment), à des problèmes datant du moyen âge, tirés de l'Anthologie grecque, ou empruntés à d'anciens auteurs, voire arabes ou chinois. Il faut y ajouter des questions diverses nombreuses et des indications intéressantes sur certaines propositions d'Arithmétique supérieure, en particulier sur quelques théorèmes empiriques célèbres.

Tout cela ne se prête guère à une énumération détaillée. Il y a parmi les questions traitées des problèmes bien connus, il y en a d'autres que nous croyons inédits. Une bonne place a été faite aux paradoxes, avec raison à notre avis. L'auteur n'a pas craint non plus de toucher à certaines questions qui pourraient paraître ne tenir que par un fil à la Science mathématique, si celle-ci ne comprenait tout ce qui concerne les nombres et les combinaisons de la façon la plus générale. Par exemple : il y a deux hommes au moins sur la terre (et même dans Londres ou dans Paris) qui ont le même nombre de cheveux ; deux hommes peuvent être à la fois oncle et neveu l'un de l'autre; deux hommes, qui ne sont pas parents, peuvent avoir une même sœur (Eugène Sue et Ernest Legouvé étaient dans ce cas). Beaucoup, parmi les problèmes traités, peuvent fournir aux professeurs d'intéressants exercices d'Arithmétique et d'Algèbre.

Le Chapitre IV a pour objet *Les nombres de Mersenne* (nombres premiers de la forme $2^p - 1$). On y trouvera quantité de renseignements historiques et scientifiques sur ce point spécial de l'Arithmétique supérieure, où bien des énigmes restent encore à déchiffrer.

Le volume se termine par une Note de M. A. Hermann : *Comptabilité d'une personne qui dépense plus que son revenu; méthode pour se constituer à soi-même une rente viagère.* Très étudié, complété par des Tableaux patiemment calculés, ce travail a pour but de prémunir contre la faute que l'on commet en plaçant prématurément sa fortune en viager.

Ajoutons que l'Ouvrage de M. Rouse Ball fourmille d'indications bibliographiques; dans les citations faites, les *Nouvelles Annales* tiennent une place importante, qui s'explique par le fait que, depuis sa fondation, c'est-à-dire depuis 66 ans, ce journal n'a cessé de suivre le mouvement mathématique. C'est un motif de plus pour que nous souhaitions à la nou-

velle édition des *Récréations mathématiques* le même succès qu'à ses devancières et pour que nous attendions avec impatience la publication de la deuxième Partie.

C.-A. Laisant.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

Besançon.

Épreuve écrite. — I. *Détermination de la température absolue par les propriétés des fluides gazeux. Cas où le gaz suit la loi de Joule ou la loi de Mariotte.*

II. *Poutre doublement encastrée; cas d'une charge fixe uniformément répartie; dimensions de sécurité de la poutre.* (Juin 1906.)

Épreuve écrite. — I. *Indiquer d'une manière sommaire la formation des équations de l'équilibre des corps élastiques homogènes et isotropes.*

II. *Équilibre élastique d'un parallélépipède droit homogène et isotrope dont deux bases opposées sont soumises à une traction normale uniformément répartie.*

Équilibre élastique d'une sphère pleine dont la surface est soumise à une traction uniformément répartie.

En supposant la sphère et le parallélépidède formés d'une même matière, on a déterminé le coefficient d'élasticité longitudinale E *du prisme et le coefficient d'élasticité radiale* ε *de la sphère. En déduire les coefficients* λ *et* μ *de Lamé relatifs à la matière considérée.*

(Novembre 1907.)

(L'épreuve pratique a été la même que pour le certificat de Mécanique rationnelle.)

Épreuve théorique. — I. *On considère un mouvement pendulaire troublé par un frottement constant et restauré par un choc au point mort.*

On envisage tour à tour les deux hypothèses suivantes :

1° *Le choc communique une quantité de mouvement constante;*

2° *Le choc communique une quantité constante de force vive.*

Dans chacune de ces hypothèses on discutera l'établissement d'un régime limité périodique stable.

II. *Loi de Poiseuille relative au frottement intérieur des liquides. Application au mouvement de l'eau dans un tuyau horizontal cylindrique.*

Épreuve pratique. — *Une roue de* 60 *dents conduisant un pignon à* 6 *ailes doit commencer la conduite avant la ligne des centres; l'angle a que fait alors le flanc utile du pignon avec la ligne des centres est* 17° 44′ 13″.

Le moment moteur sur la roue étant de

1 gramme-millimètre,

calculer le moment résistant sur le pignon : coefficient de frottement 0,15. (Juin 1907.)

Lille.

Épreuve théorique. — I. *Transmission par bielle et manivelle. On admettra tout ce qui est relatif aux accélérations, et l'on étudiera seulement les questions suivantes :*

1° *Réduction des forces d'inertie de la bielle ;*

2° *Réactions d'une machine horizontale à un cylindre sur son bâti.*

II. *Rôle du volant, dans le cas des moteurs d'automobiles, pour la régularisation des tensions et des réactions dans les mécanismes de transmission, depuis l'arbre moteur jusqu'aux roues.* (*On considérera seulement le cas de la marche en régime normal à vitesse moyenne constante, et on laissera de côté la question de la régularisation cyclique de la vitesse.*

Épreuve pratique. — *Avant-projet d'une boîte de vitesse.*

Cet avant-projet se réduira au choix des diverses multiplications eu égard aux manœuvres sur route. On mettra aussi en évidence les conditions que doivent rem-

plir le régulateur et au besoin ses organes auxiliaires (accélérateur et modérateur).

Données :

Poids de la voiture en charge	$P = 1500^{kg}$
Surface de front	$S = 2^{m^2}$
Rayon des roues motrices....	$R = 0^{m},45$
Coefficient normal de traction.......	$f = 0,025$

La plus petite démultiplication est choisie de façon que l'on fasse 40^{km} *à l'heure quand le moteur tourne à sa vitesse de régime de* 800 *tours à la minute. Le couple moteur maximum est déterminé de façon que l'on puisse faire* 40^{km} *à l'heure à la montée d'une pente de* 25^{mm} *par mètre.*

On admettra que le couple moteur maximum reste sensiblement constant quand le moteur fait de 400 *à* 800 *tours, et qu'il décroît progressivement de* $\frac{1}{5}$ *quand on passe de* 800 *à* 1200 *tours. Le rendement du mécanisme est* $\rho = 0,70$.

On étudiera seulement les cas suivants :

I. *Marche en palier à* 60^{km}, 40^{km}, 20^{km}, 10^{km}.

II. *Montée d'une pente de* 60^{mm} *par mètre :* 1° *vitesse maxima réalisable;* 2° *marche à* 25^{km} *et à* 15^{km}.

III. *Montée d'une pente de* 100^{mm} *par mètre; indiquer les différentes vitesses réalisables.* (Juin 1907.)

Épreuve théorique. — I. *Fonctionnement dynamique du régulateur.*

II. *Équilibrage des masses à mouvement circulaire.*

Épreuve pratique. — *Étudier par le calcul, et à l'aide d'un graphique, les variations de la pression exercée par le piston d'un moteur à explosion sur les parois latérales du cylindre.*

Données :

Alésage	130^{mm}
Course..........	140^{mm}
Volume de la chambre de compression..	632^{cm^3}
Rapport de bielle à manivelle.........	4,5
Pression produite par l'explosion.......	22^{kg} par cm^2
Pression d'admission..................	1^{kg} par cm^2

On fera cette étude d'après le diagramme théorique, en considérant seulement les périodes de compression et de détente, et l'on prendra pour le rapport des deux chaleurs spécifiques la valeur $K = 1,4$; *l'explosion est supposée instantanée et se fait sous le volume de la chambre de compression.*

Nancy.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *En un point d'un solide, les fonctions caractéristiques des efforts se réduisent à une tension ou une compression* N_x *et à un cisaillement* T_{xy} *rapportés à l'unité de surface. Déterminer l'effort s'exerçant au point donné sur un élément de surface quelconque; trouver les directions principales, les maxima et les minima des composantes normales ainsi que des composantes tangentielles des efforts.*

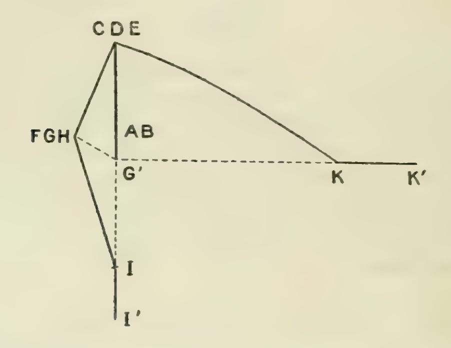
II. *Deux poulies* A *et* B *de même rayon* R *sont clavetées sur deux arbres parallèles et situés dans un même plan horizontal; une troisième poulie* C *de rayon* R', *servant de frein dynamométrique, est folle sur un arbre parallèle aux premiers; les centres des trois poulies sont situés dans un même plan perpendiculaire aux arbres, et forment un triangle isoscèle, le centre de* C *étant à égale distance des deux autres.*

La poulie A *reçoit d'un moteur une puissance de* N *chevaux et tourne à la vitesse de* n *tours par minute; une courroie transmet cette puissance aux deux autres poulies; le brin menant passe d'abord sur la poulie* C *puis sur la poulie* B; *les arcs embrassés par la courroie sur* A *et* B *ont pour mesure* α, *et l'arc embrassé sur* C *a pour mesure* V. *On empêche la poulie* C *de tourner en appliquant un poids* P *à l'extrémité d'un levier horizontal de longueur* l *fixé au moyeu de cette poulie; on suppose que la courroie, qui glisse sur* C, *est sur le point de glisser sur* A, *et que son coefficient de frottement sur les poulies est égal à* f.

On demande : 1° *les tensions dans les brins de la courroie;* 2° *la relation qui existe entre le poids* P *et la puissance* N; 3° *la puissance transmise à la poulie* B *et le*

rendement de la transmission; 4° *la puissance absorbée par la poulie* C.

Épreuve pratique. — *Un arbre horizontal* AB *porte en bout une manivelle* AC *avec son maneton* CDE; *à l'extrémité de celui-ci se trouve fixée une contre-manivelle* EF *dont le maneton est* FGH.



En D *agit une bielle* DK *recevant son mouvement d'un piston se mouvant horizontalement suivant* KK′. *En* G *est articulée la bielle* GI *actionnant le piston d'une pompe auxiliaire, le point* I *se mouvant suivant la verticale* II′.

L'arbre, regardé dans le sens AB, *tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, à la vitesse de* 90 *tours par minute; la direction de* EF *par rapport à* CA *est telle que le rayon* GG′ *du cercle décrit par* G *soit décalé de* 45° *en arrière de la direction de la manivelle* CA *et soit égal au tiers de* CA; *on donne* CA = 450^{mm}, DK = 5 CA, GI = 566′.

En K *agit suivant* KK′ *une force motrice de* 10000^{kg}, *en* I *suivant* II′ *une force résistante de* 2000^{kg}.

On demande : 1° *d'indiquer et de calculer les efforts divers auxquels sont soumis les tourillons* HGF *et* EDC, *ainsi que le bras* FE, *en particulier lorsque* CA *est vertical;* 2° *de calculer les dimensions à donner à ces pièces que l'on suppose en acier, dans les conditions habituelles de résistance.* (Juin 1907.)

AVIS.

Nous prions les auteurs de solutions de questions proposées de vouloir bien se conformer aux indications suivantes :

1° *Reproduire en tête de chaque solution, conformément à la disposition adoptée dans les* Nouvelles Annales, *l'énoncé de la question proposée, précédé lui-même du renvoi au volume (millésime) et à la page où se trouve cette question;*

2° *N'écrire qu'au recto de chaque feuillet;*

3° *Dans le cas où la solution est accompagnée d'une figure, dessiner cette dernière avec le plus de soin possible et sur une feuille séparée.*

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2074.

(1907, p. 192.)

On donne un quadrilatère complet; les couples de sommets sont A *et* A′, B *et* B′, C *et* C′, *les sommets* A′, B′, C′ *appartenant à un même côté. Des points* A, B, C *comme centres, on décrit trois circonférences* (A), (B), (C), *qui se coupent deux à deux aux points* A_1 *et* A_2, B_1 *et* B_2, C_1 *et* C_2; *on trace alors la circonférence* (A′) *qui a pour centre le point* A′ *et qui passe aux points* A_1 *et* A_2; *on trace de même les circonférences analogues* (B′) *et* (C′).

1° *Les trois circonférences* (A′), (B′), (C′) *ont deux points communs* D_1 *et* D_2 *de sorte que les trois couples de circonférences forment un système symétrique.*

2° *Si les circonférences* (A) *et* (A′) *sont orthogonales, ainsi que les circonférences* (B) *et* (B′), *il en est de même des circonférences* (C) *et* (C′). *Le système des circonférences dépend alors d'un paramètre, et le lieu des points* A_1 *et* A_2, *par exemple, est une circonférence ayant son centre sur la droite* A′BC *et passant par les points communs aux trois circonférences qui ont pour diamètres les diagonales du quadrilatère complet.* (G. Fontené.)

SOLUTION

Par M. Letierce.

1° D'après la construction même des cercles, le centre radical I des trois circonférences (A), (B), (C) est d'égale puissance ϖ par rapport aux six circonférences (A), (B), (C), (A'), (B'), (C').

Comme les trois dernières ont leurs centres en ligne droite, elles ont pour axe radical commun la perpendiculaire abaissée de I sur A'B'C'.

2° Soient E, F, G les milieux de AA', BB', CC' et (E), (F), (G) les circonférences décrites sur ces droites comme diamètres. (A) et (A') étant supposées orthogonales se coupent sur (E), (B) et (B') étant aussi orthogonales se coupent sur (F) et, par suite, le point I est sur l'axe radical commun de (E), (F), (G). Ce point I est donc de puissance ϖ par rapport à (C), (C'), (G); ces trois circonférences ont, par conséquent, pour axe radical commun la perpendiculaire abaissée de I sur CC'. On en conclut que (C) et (C') sont orthogonales.

Comme on le voit, le système des circonférences ne dépend, avec les hypothèses faites, que d'un seul paramètre, la position du point I sur l'axe radical de (E), (F), (G).

Soient P le point de rencontre de EFG et de A'BC et (P) la circonférence de centre P et passant par les points communs à (E), (F), (G). Le point I est de puissance ϖ par rapport à (P); (A'), (B), (C), (P) ont donc pour axe radical commun la perpendiculaire abaissée de I sur A'BC et par suite les points A_1 et A_2 sont sur (P) qui est le lieu cherché.

C. Q. F. D.

2076.

(1907, p. 288.)

Si l'on pose

$$J_m = \int \frac{x^m e^{a \operatorname{arc\,tang} x}\, dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$K_m = \int \frac{x^m e^{a \operatorname{arc\,tang} x}\, dx}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

on peut calculer K_0 *et* K_1. *Le calcul de toutes les autres intégrales,* m *étant un entier quelconque, se ramène à celui de* J_0. (R. Le Vavasseur.)

SOLUTION

Par M. Têtu.

Je vais calculer K_0. Pour cela j'intègre deux fois par parties,

$$(1)\quad K_0=\int\frac{e^{a\,\text{arc tang}\,x}\,dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a}\,\frac{e^{a\,\text{arc tang}\,x}}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{a}\int\frac{x\,e^{a\,\text{arc tang}\,x}\,dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$K_0=\frac{e^{a\,\text{arc tang}\,x}}{a\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{a^2}\,\frac{x\,e^{a\,\text{arc tang}\,x}}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{a^2}\int\frac{e^{a\,\text{arc tang}\,x}\,dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

D'où

$$K_0=\frac{e^{a\,\text{arc tang}\,x}(a+x)}{(1+a^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

Pour avoir K_1 reportons-nous à l'égalité (1)

$$K_0=\frac{1}{a}\,\frac{e^{a\,\text{arc tang}\,x}}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{a}K_1,$$

d'où

$$K_1=\frac{e^{a\,\text{arc tang}\,x}(ax-1)}{(1+a^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

Je vais maintenant essayer de trouver une formule de récurrence donnant K_m.

Considérons K_{m-1} et intégrons par partie,

$$\begin{aligned}K_{m-1}&=\frac{1}{a}\,\frac{x^{m-1}e^{a\,\text{arc tang}\,x}}{\sqrt{1+x^2}}\\&\quad-\frac{1}{a}\int\frac{e^{a\,\text{arc tang}\,x}}{(\sqrt{1+x^2})^{\frac{3}{2}}}[(m-1)x^{m-2}-(m-2)x^m]\,dx\\&=\frac{1}{a}\,\frac{x^{m-1}e^{a\,\text{arc tang}\,x}}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{m-1}{a}K_{m-2}+\frac{m-2}{a}K_m.\end{aligned}$$

d'où, enfin,

$$(m-2)K_m=aK_{m-1}+(m-1)K_{m-2}-\frac{x^{m-1}e^{a\,\text{arc tang}\,x}}{\sqrt{1+x^2}},$$

formule qui permettra de calculer K_2, car on connait K_0, K_1, puis K_3, etc.

Arrivons maintenant au calcul de J_m. J_m sera donnée simplement en fonction des K. En effet, on a

$$J_m = \int \frac{x^m e^{a \operatorname{arc\,tang} x} dx}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{x^m (1+x^2) e^{a \operatorname{arc\,tang} x} dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$J_m = K_m + K_{m+2}.$$

Comme les K sont tous connus, les J le seront également. Donc le problème est résolu.

2079.

(1907, p. 336.)

Si l'on pose

$$\pi - y = \sqrt{1-a^2} \int_0^x \frac{dx}{1 + a\cos x},$$

on a aussi

$$\pi = x\sqrt{1-a^2} \int_0^y \frac{dy}{1 + a\cos y}.$$

(G. F.)

SOLUTION

Par M. E.-N. Barisien.

Calculons d'abord l'intégrale

$$I = \int_0^x \frac{dx}{1 + a\cos x}.$$

Posons

$$\operatorname{tang} \frac{x}{2} = t,$$

d où

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Il en résulte

$$I = \int_0^t \frac{2\,dt}{1 + a + (1-a)t^2}.$$

Posons encore

$$\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\,t = u.$$

Alors

$$I = 2\int_0^u \frac{du\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}}{(1+a)(1+u^2)} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\,\text{arc tang}\,u.$$

Donc

$$(1)\quad I = \int_0^x \frac{dx}{1+a\cos x} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\,\text{arc tang}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\,\text{tang}\,\frac{x}{2}\right).$$

Or, d'après l'énoncé, on doit poser

$$\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2} = \text{arc tang}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\,\text{tang}\,\frac{x}{2}\right),$$

ou

$$\cot\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\,\text{tang}\,\frac{x}{2}.$$

Il en résulte donc

$$\cot\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\,\text{tang}\,\frac{y}{2}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = \text{arc tang}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\,\text{tang}\,\frac{y}{2}\right),$$

$$= \frac{\sqrt{1-a^2}}{2}\int_0^y \frac{dy}{1+a\cos y},$$

ce qui donne bien

$$\pi - x = \sqrt{1-a^2}\int_0^y \frac{dy}{1+a\cos y}.$$

En résumé, la question énoncée est une conséquence de la relation

$$(2)\qquad \text{tang}\,\frac{x}{2}\,\text{tang}\,\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}.$$

Remarques. — 1° Si l'on pose

$$\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} = \lambda,$$

on voit que si

$$\operatorname{tang}\frac{x}{2}\operatorname{tang}\frac{y}{2} = \lambda, \tag{3}$$

il en résulte

$$\left\{\begin{aligned} \pi - x &= \lambda \int_0^y \frac{dy}{\sin^2\frac{y}{2} + \lambda^2 \cos^2\frac{y}{2}}, \\ \pi - y &= \lambda \int_0^x \frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2} + \lambda^2 \cos^2\frac{x}{2}}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

2° Une application intéressante de la remarque précédente est la suivante :

Soient F et F′ les foyers, et M un point d'une ellipse dont l'excentricité est e. Si x et y désignent les angles MFF′ et MF′F, on a

$$\operatorname{tang}\frac{x}{2}\operatorname{tang}\frac{y}{2} = \frac{1-e}{1+e}.$$

On en déduit les formules (4) avec $\lambda = \dfrac{1-e}{1+e}$.

Autres solutions par MM. Gaedecke et Parrod.

2080.

(1907, p. 336.)

On coupe le triangle ABC *par la droite* $\Delta(\lambda\mu\nu)$.

I. *Les points* I, H, K *symétriques des sommets* A, B, C *par rapport aux milieux des segments* $\mu\nu$, $\lambda\nu$, $\lambda\mu$, *sont situés sur une droite* Δ_1.

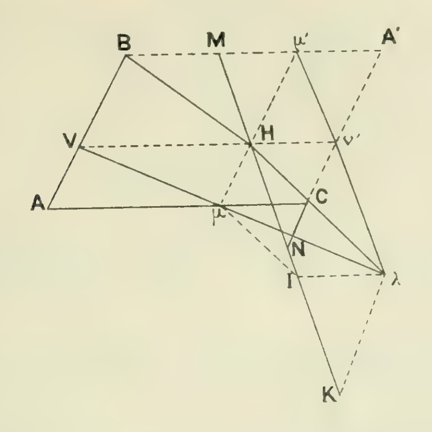
II. *Si* Δ *enveloppe une conique inscrite à* ABC, Δ_1 *tourne autour d'un point fixe.*

III. *Si* Δ *est une droite de Simson,* Δ_1 *est perpendiculaire à* Δ. (P. Sondat.)

SOLUTION
Par M. Parrod.

I. Construisons le parallélogramme ABA′C et prenons sur BA′ une longueur $B\mu' = A\mu$, la droite $\lambda\mu'$ rencontre CA′ au

point ν' tel que $C\nu' = A\nu$. On le démontre simplement à l'aide du théorème de Ménélaüs appliqué aux deux transversales $\lambda\mu\nu$ et $\lambda\mu'\nu'$.



Par la translation $A'\mu' = C\mu$, ν' vient en H et λ en I; par la translation $\mu'H = B\nu$, μ' vient en H et λ en K; donc les trois points I, H et K sont en ligne droite.

II. La droite Δ_1 rencontre $A'B$ en M et $A'C$ en N, on a

$$A'M = 2\,C\mu, \qquad A'N = 2\,B\nu.$$

μ et ν décrivant deux divisions homographiques, il en est de même de M et N; quand Δ est confondu avec BC, les deux points M et N sont tous deux en A; donc Δ_1 passe par un point fixe.

III. Considérons la figure ordinaire de la droite de Simson $\lambda\mu\nu$, relative au point P; la direction de Δ_1 s'obtient en menant CD parallèle, égal à $B\nu$ et de même sens, et en joignant μD. Les deux triangles $P\mu\nu$ et $C\mu D$ sont semblables, donc

$$\widehat{\lambda\mu P} = \widehat{D\mu C};$$

l'angle $P\mu C$ étant droit, $\lambda\mu D$ est aussi droit.

QUESTIONS.

2087. Intégrer l'équation différentielle

$$A(x)y'^2 - A'(x)yy' + C(x)y^2 = H(x)$$

avec la condition $H = CA - \frac{A'^2}{2}$.

A et C sont des fonctions arbitraires de x. A' est la dérivée de A. PIERRE FAVRE.

2088. La tangente et la normale en un point M quelconque d'une ellipse de centre O rencontrent le grand axe en T et N. 1° La perpendiculaire abaissée de T sur OM enveloppe une ellipse; 2° la parallèle menée par N à OM est normale à une ellipse fixe. E.-N. BARISIEN.

[I23a]

CONTINUANTS : APPLICATIONS A LA THÉORIE DES NOMBRES ;

Par M. A. DELTOUR.

INTRODUCTION.

1. Les déterminants de la forme

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & . & . & .... & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & . & . & .... & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & . & . & .... & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & a_4 & . & . & .... & . \\ . & . & . & . & . & . & .... & . \\ . & . & . & . & . & . & .... & 0 \\ . & . & . & . & . & . & a_{k-1} & b_{k-1} \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & c_{k-1} & a_k \end{vmatrix}$$

sont connus sous le nom de *continuants* qui leur a été donné par M. Muir et ont été étudiés par plusieurs mathématiciens, notamment par Sylvester.

2. Cette dénomination se trouve justifiée par ce fait que, si l'on pose

$$b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = \quad 1,$$
$$c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = -1,$$

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ sont les quotients incomplets du développement en fraction continue d'une fraction dont le numérateur est le déterminant lui-même et dont le dénominateur est le déterminant mineur commençant par a_2.

On verra plus tard (n° 26) comment la forme du n° 1 se ramène à ce cas.

Le continuant peut alors être représenté plus simplement, suivant la notation d'Euler, par

$$(a_1, \; a_2, \; a_3, \; \ldots \; a_k).$$

Les développements correspondant aux premières valeurs de k sont

$$a_1, \quad a_1 a_2 + 1, \quad a_1 a_2 a_3 - a_1 + a_3, \quad \ldots.$$

3. **Ces** continuants particuliers, dont il sera principalement question dans ce travail, jouissent de propriétés nombreuses, dont plusieurs sont susceptibles d'applications intéressantes à la Théorie des nombres.

Quelques-unes d'entre elles sont bien connues. Je n'ai pas moins cru devoir en donner la démonstration, pour laisser à mon exposition un caractère plus systématique.

DÉFINITIONS ET NOTATION.

4. 1° Les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_k$ du n° **2** seront appelées *éléments* du continuant.

2° Une *suite d'éléments* sera désignée par une lettre grecque.

Le continuant formé au moyen d'éléments d'une suite donnée sera désigné par la lettre grecque représentant cette suite, enfermée entre parenthèses.

La même suite, privée de m termes à gauche et de n termes à droite, sera désignée par la même lettre affectée des indices m et n.

Ainsi l'on posera

$$\begin{aligned}
(a_1, a_2, \ldots a_k) &= (\alpha),\\
(b_1, b_2, \ldots, b_l) &= (\beta),\\
(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l) &= (\alpha, \beta),\\
(a_2, \ldots, a_k) &= (\alpha_{(1,0)}),\\
(a_{m+1}, \ldots, a_{k-n}) &= (\alpha_{(m,n)}).
\end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$(\alpha_{(0,0)}) = (\alpha).$$

On peut même supprimer les parenthèses lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté à craindre et écrire simplement

$$\alpha, \quad \alpha_{1,0}, \quad \alpha_{m,n},$$

au lieu de

$$(\alpha), \quad (\alpha_{(1,0)}), \quad (\alpha_{(m,n)}).$$

$(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ désignera *un continuant formé au moyen des éléments de l'ensemble des suites* α, β, γ, ...

3° Le *nombre des éléments* d'une suite α sera désigné par n_α.

4° *Valeur des symboles* $(\alpha_{m,n})$ *lorsque* $m + n \geqq n_\alpha$, m *et* n *prenant les valeurs* 0 *ou* 1. — Ces symboles, qui n'ont pas de sens par eux-mêmes, se présentent cependant dans les formules établies plus loin.

Pour trouver la signification qu'il convient de leur donner en vue de laisser aux formules toute leur généralité, il faut remarquer que, pour un continuant (α) composé d'un nombre quelconque d'éléments et mis sous forme de déterminant, on a

$$\begin{aligned}(0, \alpha) &= (\alpha_{1,0}),\\ (\alpha, 0) &= (\alpha_{0,1}),\\ (0, \alpha, 0) &= (\alpha_{1,1}),\end{aligned}$$

comme il est aisé de le vérifier à l'aide des propriétés des déterminants.

Ces égalités définiront les symboles des seconds membres, dans les cas où ces symboles n'ont pas de sens par eux-mêmes.

Si (α) se réduit à deux éléments, on a

$$(\alpha_{1,1}) = (0, a, b, 0) = (0, a) = 1.$$

Si (α) se réduit à un seul élément, on a

$$(\alpha_{1,0}) = (0, a) = 1, \qquad (\alpha_{0,1}) = (a, 0) = 1, \qquad (\alpha_{1,1}) = (0, a, 0) = 0.$$

Les démonstrations des formules données plus loin restent valables pour tous les cas en admettant les valeurs ainsi trouvées.

On verra plus loin (n° 11, *Remarque*) comment il est possible d'attribuer un sens au symbole $(\alpha_{m,n})$, quels que soient α, $m \geqq 0$, $n \geqq 0$.

5° La suite obtenue en *renversant* l'ordre des éléments d'une suite α sera désignée par $\underline{\alpha}$. Ainsi on écrira

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (\alpha) \text{ ou } \alpha,$$
$$(a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1) = (\underline{\alpha}) \text{ ou } \underline{\alpha}.$$

6° Une suite α, dont tous les éléments sont changés de signe, sera représentée par $-\alpha$.

7° La somme des deux continuants (α) et $(\alpha_{1,1})$ sera dite l'*adjoint* du continuant (α) et sera représentée par $((\alpha)$.

On posera donc

$$(\alpha) + (\alpha_{1,1}) = ((\alpha).$$

PREMIÈRE PARTIE.

FORMULES ALGÉBRIQUES.

FORMULE FONDAMENTALE. DÉVELOPPEMENT DES CONTINUANTS.

3. La formule fondamentale d'où résultent toutes les propriétés des continuants est la suivante :

$$\text{(I)} \qquad (\alpha, \beta) = (\alpha)(\beta) + (\alpha_{0,1})(\beta_{1,0}).$$

Pour la démontrer, considérons (α, β) sous sa forme de déterminant ; soit

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (\alpha),$$
$$(b_1, b_2, \ldots, b_l) = (\beta).$$

On a

$$(\alpha, \beta) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \ldots & . & 0 & . & . & \ldots & 0 \\ -1 & a_2 & . & \ldots & . & . & . & . & \ldots & . \\ 0 & .. & . & \ldots & . & . & . & . & \ldots & . \\ . & .. & . & \ldots & 1 & 0 & . & . & \ldots & 0 \\ . & .. & . & -1 & a_k & 1 & . & . & \ldots & . \\ . & .. & . & \ldots & -1 & b_1 & 1 & . & \ldots & . \\ 0 & .. & . & \ldots & 0 & -1 & b_2 & 1 & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . & \ldots & -1 & . & \ldots & . \\ . & .. & . & \ldots & . & \ldots & \ldots & . & \ldots & 1 \\ 0 & .. & . & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & . & -1 & b_l \end{vmatrix}.$$

Formons avec les éléments des k premières colonnes un déterminant mineur D_a d'ordre k et avec ceux des l dernières le déterminant mineur D_b d'ordre l n'ayant aucune ligne commune avec le précédent. Faisons le produit $D_a D_b$.

On sait que le déterminant d'ordre $(k+l)$ est la somme algébrique de tous les produits possibles et distincts ainsi obtenus.

Or, dans un continuant tel que (α, β), ces produits seront nuls à moins que

D_a ne contienne les $(k-1)$ premières lignes,
D_b » $(l-1)$ dernières.

D_a et D_b seront complétés par l'une ou l'autre des lignes suivantes :

$$\overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & a_k \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 \end{matrix}}^{D_a.} \qquad \overbrace{\begin{matrix} b_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & . & \ldots & 0 & 0 \end{matrix}}^{D_b.}$$

Tous les produits se réduisent donc à deux.

Le premier est

$$(\alpha)(\beta),$$

le second

$$(\alpha_{0,1})(\beta_{1,0}),$$

tous deux affectés du signe $+$.

On a, par exemple,

$$(a, b, c, d, e) = (a, b)(c, d, e) + (a)(d, e).$$

Si l'une des suites se réduit à un seul élément, on retrouve la formule de récurrence bien connue dans la théorie des fractions continues, écrite sous la forme

$$(a, \alpha) = a(\alpha) + (\alpha_{1,0}).$$

6. *Un continuant* $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu)$ *peut être développé par la formule suivante :*

$$\text{(II)} \qquad (\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu) = \Sigma\, \alpha_{0,m}\, \beta_{m,n}\, \gamma_{n,p} \ldots \lambda_{u,v}\, \mu_{v,0},$$

dans laquelle le second membre est la somme des produits de continuants obtenus en donnant à m, n, p, ..., u, v les valeurs 0 *ou* 1 *de toutes les manières possibles.*

Pour un continuant composé seulement de deux suites, les relations (I) et (II) sont identiques.

Il suffit, par conséquent, de démontrer la proposition pour un continuant de N suites lorsqu'on la suppose établie dans le cas de N — 1 suites.

Or, on a, d'après (I),

$$(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu) = (\alpha, \beta, \ldots, \lambda)\mu + (\alpha, \beta, \ldots, \lambda_{0,1})\mu_{1,0}.$$

Les continuants $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$, $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda_{0,1})$ étant développés, tous les termes du second membre de cette égalité ont la forme de ceux compris sous le signe Σ dans (II), avec la valeur $v = 0$ pour ceux du premier produit et $v = 1$ pour ceux du second.

Les indices m, n, ..., u, v prennent les valeurs o ou 1 de toutes les manières possibles, puisqu'il en est ainsi par hypothèse pour m, n, ..., u.

Ce développement est donc identique à celui de (II).

Le *nombre des termes* est 2^{N-1}, car la série des valeurs o ou 1 données aux indices dans l'un d'eux peut être considérée comme représentant un nombre écrit dans le système binaire, et tous les nombres de o à $2^{N-1}-1$ se trouvent ainsi représentés une seule fois dans le développement.

En appliquant, par exemple, la relation (II) à un continuant composé de quatre suites, on trouve

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \alpha\beta\gamma\delta + \alpha_{0,1}\beta_{1,0}\gamma\delta + \alpha_{0,1}\beta_{1,1}\gamma_{1,0}\delta + \alpha_{0,1}\beta_{1,1}\gamma_{1,1}\delta_{1,0}\\ + \alpha\beta_{0,1}\gamma_{1,0}\delta + \alpha_{0,1}\beta_{1,0}\gamma_{0,1}\delta_{1,0}\\ + \alpha\beta\gamma_{0,1}\delta_{1,0} + \alpha\beta_{0,1}\gamma_{1,1}\delta_{1,0},\end{aligned}$$

puis, chacune de ces suites étant réduite à un seul élément,

$$\begin{aligned}(a, b, c, d) = abcd &+ cd\\ &+ ad + 1\\ &+ ab.\end{aligned}$$

Remarques. — 1° Dans le cas où chaque suite α se réduit à un seul élément, on a $(\alpha_{1,1}) = 0$ et le nombre des termes du développement est alors donné par la série de Lamé :

$$0,\quad 1,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 5,\quad 8,\quad \ldots,\quad u_k,\quad \ldots,$$

telle que $u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$.

Ces nombres donnent aussi les valeurs des continuants, dans lesquels on a

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_k = 1.$$

2° Le nombre des facteurs dans chaque terme est de même parité que le nombre des éléments.

Si ce nombre est pair, le continuant ne change pas de valeur lorsqu'on change les signes de tous ses éléments. Il change de signe dans le cas contraire.

7. *Autre formule de développement par rapport à certains éléments.* — Soit un continuant

$$(\alpha_1, b_1, \alpha_2, b_2, \ldots, \alpha_k, b_k, \alpha_{k+1})$$

comprenant les k éléments b_1, b_2, ... par rapport auxquels on veut le développer.

On a la relation suivante :

$$\text{(III)} \qquad (\alpha_1, b_1, \alpha_2, b_2, \ldots, \alpha_k, b_k, \alpha_{k+1}) = \Sigma \, B_h A_h,$$

dans laquelle

B_h est le produit de h éléments quelconques de la série b_1, b_2, ..., b_k, soit $B_h = b_{m_1} b_{m_2} \ldots b_{m_h}$;

A_h le produit des continuants formés chacun d'une suite des autres éléments du continuant donné, soit antérieure à b_{m_1}, soit comprise entre deux éléments successifs appartenant à B_h, soit postérieure à b_{m_h}, et où l'on remplace par o les autres termes de la série b_1, b_2, ..., b_k.

Par convention, on fait $B_0 = 1$.

Le signe Σ s'applique à toutes les valeurs de h variant de o à k et, pour chacune d'elles, à toutes les combinaisons distinctes de h éléments qu'on peut former avec b_1, b_2, ..., b_k.

Pour le démontrer, faisons d'abord $k = 1$. On a, d'après (II),

$$\begin{aligned}(\alpha_1, b_1, \alpha_2) &= \alpha_1 b_1 \alpha_2 - \alpha_{1\,(0,1)}\, \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_{2\,(1,0)} \\ &= b_1 \alpha_1 \alpha_2 + (\alpha_1, 0, \alpha_2).\end{aligned}$$

Supposons la proposition démontrée pour $k - 1$ élé-

ments; on a, en appliquant la formule précédente,

$$(\alpha_1, b_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, b_k, \alpha_{k+1}) = b_k(\alpha_1, b_1, \ldots, \alpha_{k-1}, b_{k-1}, \alpha_k)\alpha_{k+1}$$
$$+ (\alpha_1, b_1, \ldots, \alpha_k, 0, \alpha_{k+1}).$$

Le développement du premier terme du second membre donne tous les termes de (III) contenus sous le signe Σ qui se composent avec b_k, et celui du second donne tous les termes qui en sont indépendants : ce qui démontre la proposition.

Par exemple, pour $k = 4$, on a

$$\begin{aligned}(\alpha_1, b_1, \alpha_2, b_2, \alpha_3, b_3, \alpha_4, b_4, \alpha_5) = {} & b_1 b_2 b_3 b_4 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \\ & + b_1 b_2 b_3 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_4, 0, \alpha_5) \\ & + b_1 b_2 b_4 \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_3, 0, \alpha_4) \alpha_5 \\ & + b_1 b_3 b_4 \alpha_1 (\alpha_2, 0, \alpha_3) \alpha_4 \alpha_5 \\ & + b_2 b_3 b_4 (\alpha_1, 0, \alpha_2) \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \\ & + b_1 b_2 \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_3, 0, \alpha_4, 0, \alpha_5) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (\alpha_1, 0, \alpha_2, 0, \alpha_3, 0, \alpha_4, 0, \alpha_5).\end{aligned}$$

FORMULES DE TRANSFORMATION.

8. Les propositions qui vont suivre ont pour objet les transformations d'un continuant qui n'altèrent pas sa valeur.

Ces transformations sont, d'une manière générale, de deux sortes :

1° Introduction de suites nouvelles entre deux éléments quelconques du continuant;

2° Transformation des éléments eux-mêmes ou de suites d'éléments.

9. *Définition et propriétés des suites* θ, θ', η, η'. — On désignera par θ, θ', η, η' des suites α particulières pour lesquelles les valeurs de (α), $(\alpha_{1,1})$, $(\alpha_{0,1})$, $(\alpha_{1,0})$

sont :

	(α).	$(\alpha_{1,1})$.	$(\alpha_{0,1})$.	$(\alpha_{1,0})$.
Pour (θ).........	1	1	0	0
Pour (η).........	1	-1	0	0
Pour (θ').........	-1	-1	0	0
Pour (η').........	-1	1	0	0

En voici des exemples :

Type (θ)... $(0, 0), (2, -1, 4, -1, 2, -2), (1, -3, 1, -3, 1, -3)$

Type (η).. $(1, -1, 1), (0, -1, 1, -1, 0), (-1, 3, -1, 2, -2)$

Type (θ').. $(1, -2, 1, -2), (4, -1, 2, -2, 3, -2, 1, -3)$

Type (η').. $(-1, 1, -1), (0, 1, -1, 1, 0), (1, -3, 1, -2, 2)$

10. *Une suite formée par la réunion de deux suites dont chacune appartient à l'un des types* θ, θ', η *ou* η', *en conservant l'ordre des éléments, appartient encore à l'un de ces mêmes types.*

Soient, par exemple, λ et μ deux de ces suites; on a, d'après 1,

$$(T_1)\quad \begin{cases} (\lambda, \mu) = (\lambda)(\mu), & (\lambda, \mu_{0,1}) = 0, \\ (\lambda_{1,0}, \mu_{0,1}) = (\lambda_{1,1})(\mu_{1,1}), & (\lambda_{1,0}, \mu) = 0; \end{cases}$$

ce qui démontre la proposition.

En particulier, si λ et μ appartiennent au même type, leur réunion forme une suite θ.

11. Le développement d'un continuant (α, λ, β), où λ est une suite θ, θ', η ou η', donne

$$(T_2)\qquad (\alpha, \lambda, \beta) = \lambda\alpha\beta + \lambda_{1,1}\alpha_{0,1}\beta_{1,0}.$$

De cette relation, où λ et $\lambda_{1,1}$ ont les valeurs ± 1, résultent plusieurs conséquences :

1° *La valeur d'un continuant tel que* (α, λ, β) *ne*

change pas lorsqu'on substitue à λ une autre suite appartenant au même

2° *Le continuant change de signe si l'on y remplace un θ ou un η respectivement par un θ' ou un η', et* vice versa.

On n'aura plus dès lors à considérer, en général, que les types θ et η, et dans ceux-ci les suites les plus simples, $(0, 0)$ et $(0, -1, 1, -1, 0)$.

3° *Un continuant ne change pas de valeur lorsqu'on introduit un θ entre deux quelconques de ses éléments.*

Sa valeur absolue ne change pas lorsqu'on introduit un η en changeant les signes de tous les éléments qui le précèdent ou qui le suivent.

Car (T_2) devient, pour θ,

$$(T_3) \qquad (\alpha, \theta, \beta) = (\alpha, \beta)$$

et, pour η,

$$(T_4) \qquad (\alpha, \eta, \beta) = (-1)^{n_\beta}(\alpha, -\beta).$$

Remarque. — La formule (T_3) permet de donner aux symboles $(\alpha_{m,n})$, lorsque $m + n \geqq n_\alpha$, une signification précise. Car on peut introduire entre les éléments autant de fois $(0, 0)$ qu'il est nécessaire pour que n_α devienne plus grand que $m + n$.

Le résultat sera $(0) = 0$ si $n_\alpha - (m + n)$ est impair et $(0, 0) = 1$ s'il est pair.

Ainsi $(\alpha_{2,3})$, où α ne contient que deux éléments, devient $(a, 0, 0, 0, 0, b)$ privé de deux éléments à gauche et de trois à droite, c'est-à-dire (0).

12. *Généralisation de la formule* (T_4). — On a

$$(T_5) \quad \begin{cases} (\alpha_1, \eta, -\beta_1, \eta, \alpha_2, \eta, -\beta_2, \eta, \ldots, \eta, -\beta_h, \eta, \alpha_{h+1}) \\ \qquad = (-1)^{n_{\beta_1} + n_{\beta_2} + \cdots + n_{\beta_h}}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \beta_h, \alpha_{h+1}). \end{cases}$$

La formule sera démontrée si elle l'est pour $h = 1$. On a, d'après (T_4),

$$(\alpha_1, \eta_1, -\beta_1, \eta_1, \alpha_2) = (-1)^{n_{\alpha_2}}(\alpha_1, \eta_1, -\beta_1, -\alpha_2),$$

puis

$$(\alpha_1, \eta_1, -\beta_1, -\alpha_2) = (-1)^{n_{\beta_1}+n_{\alpha_2}}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2),$$

d'où

$$(\alpha_1, \eta_1, -\beta_1, \eta_1, \alpha_2) = (-1)^{n_{\beta_1}}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2).$$

Les suites β peuvent d'ailleurs se réduire à un seul élément, d'où cette conséquence :

On peut, au moyen de l'introduction de suites η_1, *modifier à volonté les signes des éléments d'un continuant.*

Voici quelques applications particulières de cette formule :

$$(T_6) \qquad \begin{cases} (\alpha, \eta_1) = (\alpha), \\ (\alpha, \eta_{1\,0,1}) = -(\alpha_{0,1}), \\ (\alpha, \eta_1, 0, \beta) = -(\alpha, 0, \eta_1, \beta). \end{cases}$$

13. Les transformations de la deuxième catégorie portent, comme je l'ai dit, sur les éléments eux-mêmes. Je vais indiquer successivement plusieurs de ces transformations qui sont particulièrement importantes :

1° *On peut, sans changer la valeur d'un continuant, renverser l'ordre de ses éléments et écrire*

$$(T_7) \qquad (\alpha) = (\underset{\smile}{\alpha}).$$

Cela résulte immédiatement des propriétés des déterminants.

14. 2° On a vu (n° 11, 1°) que, dans un continuant, certaines suites θ ou η sont équivalentes, c'est-

à-dire qu'elles peuvent se substituer l'une à l'autre sans que la valeur du continuant soit modifiée.

Pour trouver d'une façon générale les suites équivalentes, désignons par λ et μ deux de ces suites; on a

$$(\alpha, \lambda, \beta) = \alpha\lambda\beta + \alpha_{0,1}\lambda_{1,0}\beta + \alpha_{0,1}\lambda_{1,1}\beta_{1,0} + \alpha\lambda_{0,1}\beta_{1,0}.$$

De même,

$$(\alpha, \mu, \beta) = \alpha\mu\beta + \alpha_{0,1}\mu_{1,0}\beta + \alpha_{0,1}\mu_{1,1}\beta_{1,0} + \alpha\mu_{0,1}\beta_{1,0}.$$

Les conditions à remplir sont donc

$$\lambda = \mu, \qquad \lambda_{1,0} = \mu_{1,0},$$
$$\lambda_{1,1} = \mu_{1,1}, \qquad \lambda_{0,1} = \mu_{0,1}.$$

En général, on peut satisfaire à ces conditions avec deux suites distinctes λ et μ si l'on dispose d'un nombre suffisant d'éléments. Mais on se bornera ici à considérer une solution qui sera utile dans les applications et qui est la suivante :

$$\lambda = (a), \qquad \mu = (b, 0, c),$$

avec la condition $a = b + c$.

On vérifie, en effet, immédiatement que les conditions écrites plus haut sont satisfaites.

Ainsi,

$$(T_8) \qquad (\alpha, a, \beta) = (\alpha, b, 0, c, \beta).$$

15. 3° Des propriétés des déterminants on déduit encore les formules suivantes, qui se rapportent à des *continuants dont le premier élément est* ± 1 :

$$(T_9) \qquad \begin{cases} (1, a_2, \alpha) = (a_2 + 1, \alpha), \\ (-1, a_2, \alpha) = -(a_2 - 1, \alpha). \end{cases}$$

L'application de la relation (I) donne d'ailleurs

$$\begin{aligned}(1, a_2, \alpha) &= (1, a_2)\alpha + \alpha_{1,0}\\ &= (a_2 + 1)\alpha + \alpha_{1,0}\\ &= (a_2 + 1, \alpha),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-1, a_2, \alpha) &= (-1, a_2)\alpha - \alpha_{1,0}\\ &= -(a_2 - 1)\alpha - \alpha_{1,0}\\ &= -(a_2 - 1, \alpha).\end{aligned}$$

Remarque. — On a des formules analogues dans le cas où le dernier élément du continuant est ± 1.

16. 4° Le procédé de transformation suivant fait intervenir un facteur étranger.

Si (α, β), (α', β') sont deux continuants satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(T_{10})\quad \left\{\begin{aligned} (\alpha) &= (\alpha'), & (\beta) &= (\beta'),\\ t(\alpha_{1,0}) &= (\alpha'_{1,0}), & t(\beta_{1,0}) &= (\beta'_{1,0}),\\ \frac{1}{t}(\alpha_{0,1}) &= (\alpha'_{0,1}), & \frac{1}{t}(\beta_{0,1}) &= (\beta'_{0,1}),\\ (\alpha_{1,1}) &= (\alpha'_{1,1}), & (\beta_{1,1}) &= (\beta'_{1,1}),\end{aligned}\right.$$

t étant un certain nombre, on a aussi

$$\left\{\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= (\alpha', \beta'),\\ t(\alpha_{1,0}, \beta) &= (\alpha'_{1,0}, \beta'),\\ \frac{1}{t}(\alpha, \beta_{0,1}) &= (\alpha', \beta'_{0,1}),\\ (\alpha_{1,0}, \beta_{0,1}) &= (\alpha'_{1,0}, \beta'_{0,1}).\end{aligned}\right.$$

On vérifie ces relations en remplaçant les α par leurs valeurs en fonction des α' dans les développements des (α, β). Le calcul ne présente pas de difficulté.

On arrive à la même conclusion pour deux continuants (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ composés chacun de trois

suites; si les continuants correspondants (α) et (α'), (β) et (β'), (γ) et (γ') satisfont aux conditions (T_{10}), on a aussi

$$\left\{\begin{aligned} &(\alpha, \beta, \gamma) &&= (\alpha', \beta', \gamma'),\\ &t(\alpha_{1,0}, \beta, \gamma) &&= (\alpha'_{1,0}, \beta', \gamma'),\\ &\frac{1}{t}(\alpha, \beta, \gamma_{0,1}) &&= (\alpha', \beta', \gamma'_{0,1}),\\ &(\alpha_{1,0}, \beta, \gamma_{0,1}) &&= (\alpha'_{1,0}, \beta', \gamma'_{0,1}).\end{aligned}\right.$$

En effet, désignons par ρ l'ensemble des éléments de (α, β) et de même par ρ' celui des éléments de (α', β').

Les continuants (ρ) et (ρ') satisfont à (T_{10}) comme on vient de le voir.

(γ) et (γ') y satisfont aussi par hypothèse. Donc aussi (ρ, γ) et (ρ', γ').

On a, par conséquent,

$$\left\{\begin{aligned} &(\rho, \gamma) &&= (\rho', \gamma'),\\ &t(\rho_{1,0}, \gamma) &&= (\rho'_{1,0}, \gamma'),\\ &\frac{1}{t}(\rho, \gamma_{0,1}) &&= (\rho', \gamma'_{0,1}),\\ &(\rho_{1,0}, \gamma_{0,1}) &&= (\rho'_{1,0}, \gamma'_{0,1}).\end{aligned}\right.$$

En remplaçant ρ par α, β et ρ' par α', β' dans ces dernières égalités, on retrouve les précédentes.

La proposition peut s'étendre de la même façon à deux continuants composés d'un nombre quelconque de suites.

Remarque. — Un certain nombre de suites peuvent se réduire à deux éléments.

Par exemple, les deux continuants

$$(a, b, c, d), \quad (a', b', c', d'),$$

tels que

$$a' = \frac{a}{t}, \qquad b' = bt, \qquad c' = \frac{c}{t}, \qquad d' = dt.$$

peuvent être considérés comme étant de la forme (α, β) et (α', β') en posant

$$\left\{\begin{array}{l}(\alpha) = (a, b), \\ (\beta) = (c, d),\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}(\alpha') = (a', b'), \\ (\beta') = (c', d').\end{array}\right.$$

Les conditions (T_{10}) sont satisfaites par

$$(\alpha) \quad \text{et} \quad (\alpha'), \qquad (\beta) \quad \text{et} \quad (\beta'),$$

donc aussi par les deux continuants

$$(\alpha, \beta) \quad \text{et} \quad (\alpha', \beta').$$

On a ainsi, en particulier,

$$(a, b, c, d) = (a', b', c', d').$$

GÉNÉRALISATION DE LA RELATION (I).

17. *Entre quatre suites quelconques* α, β, γ, δ, *on a la relation*

$$(\text{IV}) \left\{\begin{array}{r}(\alpha, \eta_1, 0, \underline{\beta})(\gamma, \eta_1, 0, \underline{\delta}) + (\alpha, \eta_1, 0, \underline{\gamma})(\delta, \eta_1, 0, \underline{\beta}) \\ + (\alpha, \eta_1, 0, \underline{\delta})(\beta, \eta_1, 0, \underline{\gamma}) = 0.\end{array}\right.$$

En effet, si l'on divise chacun des termes du trinome qui forme le premier membre par le produit

$$(\alpha_{0,1})(\beta_{0,1})(\gamma_{0,1})(\delta_{0,1})$$

après avoir mis chaque continuant tel que $(\alpha, \eta_1, 0, \underline{\beta})$ sous la forme $(\alpha)(\beta_{0,1}) - (\alpha_{0,1})(\beta)$ et si l'on pose

$$x = \frac{\alpha}{\alpha_{0,1}}, \qquad y = \frac{\beta}{\beta_{0,1}}, \qquad z = \frac{\gamma}{\gamma_{0,1}}, \qquad t = \frac{\delta}{\delta_{0,1}},$$

cette formule se ramène à l'identité

$$(x - y)(z - t) + (x - z)(t - y) - (x - t)(y - z) = 0.$$

18. La formule (IV) devient

(V) $(\alpha, \beta, \gamma)(\beta) - (\alpha, \beta)(\beta, \gamma) = (-1)^{n_\beta}(\alpha_{0,1}, \gamma_{1,0})$,

lorsqu'on y remplace

$(o\underline{\beta})$ par $(\eta\beta\gamma')$,

$(o\underline{\gamma})$ » $(\eta\beta')$,

(δ) » (η),

puis

β', γ' par β, γ,

et en éliminant η par application des propriétés de ces suites.

Remarque. — En faisant évanouir β et faisant $n_\beta = 0$, on retrouve la relation (I).

19. Si α et γ se réduisent chacun à un seul terme, a et c, on a

$$(a, \beta, c)(\beta) - (a, \beta)(\beta, c) = (-1)^{n_\beta},$$

qu'on peut écrire sous forme de relation entre les quatre quantités α, $\alpha_{0,1}$, $\alpha_{1,0}$, $\alpha_{1,1}$:

(VI) $(\alpha)(\alpha_{1,1}) - (\alpha_{0,1})(\alpha_{1,0}) = (-1)^{n_\alpha}$.

Cette importante relation, qui sert dans la théorie des nombres à résoudre l'équation indéterminée du premier degré à deux inconnues, peut être vérifiée directement en remarquant que le premier membre est le continuant $(\alpha, \eta, o, \underline{\alpha}, o)$, dont la valeur est $(-1)^{n_\alpha}(\alpha, o, -\underline{\alpha}, o)$ et se réduit à $(-1)^{n_\alpha}$.

Conséquence. — Si α est une suite θ ou θ', le premier membre de (VI) devient 1 ; donc le nombre des éléments de θ ou de θ' doit être pair.

Il est impair dans η ou η'.

ADJOINT D'UN CONTINUANT.

20. *Un adjoint reste invariable pour toute permutation circulaire de ses éléments, c'est-à-dire qu'on a*

$$(A_1) \qquad ((a, \alpha) = ((\alpha, a).$$

En effet,

$$((a, \alpha) = (a, \alpha) - (\alpha_{0,1}) = a\alpha + \alpha_{1,0} + \alpha_{0,1},$$
$$((\alpha, a) = (\alpha, a) - (\alpha_{1,0}) = a\alpha + \alpha_{0,1} + \alpha_{1,0}.$$

21. *On peut appliquer aux adjoints, sans changer leur valeur, les procédés de transformation qui laissent invariables les valeurs des deux parties* (α) et $(\alpha_{1,1})$, *savoir :*

1° Introduction de suites du type θ entre deux éléments (n° 11);

2° Renversement de l'ordre des éléments (n° 13);

3° Équivalence de (a) et de (b, o, c) lorsqu'on a $a = b + c$ (n° 14);

4° Transformation au moyen d'un facteur t (n° 16).

22. *L'introduction de* τ_1 *à la suite des éléments de* $((\alpha)$ *donne un adjoint* $((\alpha, \tau_1)$ *ayant pour valeur* $(\alpha) - (\alpha_{1,1})$.

En effet, on a

$$(\alpha, \tau_1) \qquad = (\alpha),$$
$$(\alpha_{1,0}, \tau_{0,1}) = -(\alpha_{1,1}).$$

On obtiendra la valeur d'un adjoint tel que $((\alpha, \tau_1, \beta)$, résultant de l'introduction de τ_1 entre deux éléments quelconques d'un adjoint $((\alpha, \beta)$, en le mettant sous la

forme $((\beta, \alpha, \eta)$ par permutation circulaire de ses éléments.

On a

$$(A_2) \qquad ((\alpha, \eta, \beta) = (\beta, \alpha) - (\beta_{1,0}, \alpha_{0,1}).$$

APPLICATION AUX CONTINUANTS FORMÉS DE SUITES $\theta, \theta', \eta, \eta'$.

23. *Par permutation circulaire des éléments d'une suite appartenant à l'un des types* θ, θ', *on obtient encore une suite de même type.*

Soit en effet λ une suite de l'un des types θ ou θ', et posons

$$(\lambda) = (a, \alpha).$$

Posons aussi

$$(\alpha, a) = (\mu).$$

Puisqu'on a par hypothèse

$$(\alpha) = (\lambda_{1,0}) = 0,$$

les formules du n° 20 montrent que

$$(\alpha_{1,0}) = (\lambda) \quad = (\mu_{1,1}),$$
$$(\alpha_{0,1}) = (\lambda_{1,1}) = (\mu).$$

D'autre part, on a

$$\begin{cases} (\mu_{0,1}) = (\alpha) \qquad = 0, \\ (\mu_{1,0}) = (\alpha_{1,0}, a) = a(\alpha_{1,0}) + (\alpha_{1,1}) = a(\lambda) + (\alpha_{1,1}) \end{cases}$$

et

$$(\lambda_{0,1}) = (a, \alpha_{0,1}) = a(\alpha_{0,1}) + (\alpha_{1,1}) = a(\lambda_{1,1}) + (\alpha_{1,1}) = 0.$$

Comparant les deux dernières égalités, on trouve

$$(\mu_{1,0}) = a[(\lambda) - (\lambda_{1,1})].$$

Le second membre devient nul si λ est une suite θ ou θ'; μ appartient donc au même type que λ.

Dans ce cas, la valeur de l'adjoint est toujours ± 2.

24. Les suites η ou η' jouissent d'une propriété analogue, lorsqu'en faisant la permutation circulaire on donne à l'élément a des signes contraires dans λ et dans μ; on posera

$$(\lambda) = (a, \alpha),$$
$$(\mu) = (\alpha, -a).$$

Les formules du n° 23 sont entièrement applicables à ce cas moyennant le changement de signe de a dans (μ).

On trouve ainsi :

$$\left\{\begin{array}{l}(\mu_{1,1}) = (\lambda),\\ (\mu) \quad = (\lambda_{1,1}),\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}(\mu_{0,1}) = 0,\\ (\mu_{1,0}) = -a[(\lambda) + (\lambda_{1,1})].\end{array}\right.$$

$(\mu_{1,0})$ devient nul si λ est une suite η ou η'.

μ appartient donc au type η' si λ est un η et inversement.

La valeur des adjoints successifs est 0.

Si l'on appelle *permutation circulaire alternée* une permutation circulaire dans laquelle chaque élément change de signe en changeant de côté, on peut énoncer la proposition suivante :

Par permutation circulaire alternée des éléments d'une suite appartenant à l'un des types η, η', on obtient encore une suite appartenant respectivement à l'un des types η', η.

Par exemple,

$$(-1, 3, -1, 2, -2)$$

étant un (η), les continuants

$$\begin{array}{l}(3,\ -1,\ 2,\ -2,\ 1),\\(-1,\ 2,\ -2,\ 1,\ -3),\\(2,\ -2,\ 1,\ -3,\ 1),\\(-2,\ 1,\ -3,\ 1,\ -2)\end{array}$$

appartiennent alternativement aux types (η_1), (η_1').

(*A suivre.*)

[P4g]

SUR UNE TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE DU SIXIÈME ORDRE;

Par M. Lucien GODEAUX,
à Liége.

M. F. Deruyts a étudié la transformation suivante [1] :

Soient φ un faisceau de quadriques Q, et P un point non commun à toutes les quadriques de φ. A un point M correspond le point M' où la droite MP rencontre une seconde fois la quadrique du faisceau φ passant par M.

1. Dans cette Note, nous allons considérer une transformation analogue. Au lieu des droites passant par un point, nous considérons les droites d'une congruence linéaire G de directrices a_1 et a_2. Nous supposons que les droites a_1, a_2 n'ont aucun point commun à toutes les quadriques de φ.

---

[1] François Deruyts, *Sur quelques transformations géométriques* (*Mémoires de Liége*, 2e série, t. XIV, 1887).

Cela posé, recherchons l'ordre de la transformée d'un plan π.

Soit y une droite quelconque. Par un point Y_1 de cette droite passe une droite g appartenant à la congruence G. Par le point (π, g) passe une quadrique de φ. Cette quadrique marque sur la droite y deux points Y_2. Par un point Y_2 de y passe une quadrique Q de φ. Les droites qui s'appuient sur les droites a_1, a_2, y et sur la courbe (Q, π) sont au nombre de quatre et marquent sur y quatre points Y_1. Les points Y_1 et Y_2 sont donc liés par une correspondance $(4, 2)$. Il y a six coïncidences; donc :

La transformée d'un plan est une surface du sixième ordre S_6.

2. A un point commun à toutes les quadriques de φ correspondent les points de la droite de la congruence G_1 passant par le point considéré, la surface S_6 passe donc par tous les points communs à toutes les quadriques du faisceau φ. Dans le cas le plus général, celui que nous considérerons ici, ces points appartiennent à une courbe gauche du quatrième ordre c_4 de première espèce.

La surface fondamentale des points communs à toutes les surfaces de φ est formée par les droites s'appuyant sur la courbe c_4 et appartenant à la congruence G. On sait qu'une telle surface est du huitième ordre.

A un point de la droite a_1 correspondent les points communs à la quadrique de φ passant par le point considéré et un plan passant par ce point et a_2.

Les droites a_1 et a_2 sont donc doubles sur la surface S_6.

La surface fondamentale de la droite a_1 est le lieu des coniques qui s'appuient en quatre points sur une courbe gauche du quatrième ordre et de première espèce, en deux points sur une droite et en un point sur une autre droite. Nous avons démontré ailleurs que cette surface est du quatrième ordre [1].

En résumé :

La surface S_6 *possède deux droites doubles* a_1, a_2 *et une biquadratique gauche* c_4 *simple.*

La surface fondamentale de c_4 *est une surface du huitième ordre* S_8.

La surface fondamentale de a_1 (*ou de* a_2) *est une surface du quatrième ordre* S_4.

3. La droite de la congruence G qui est située dans le plan π appartient évidemment à la surface S_6.

Il en est de même des droites qui s'appuient en deux points sur la courbe c_4 et qui font partie de la congruence G.

On sait que les bisécantes d'une quartique gauche de première espèce forment une congruence d'ordre deux et de classe quatre. D'après le théorème de Halphen, le nombre de droites qui font encore partie de la surface S_6 est $1 \times 2 + 1 \times 4 = 6$.

Donc, *la surface* S_6 *possède sept droites simples.*

4. A une droite d correspond une courbe c. Cette courbe est entièrement tracée sur un hyperboloïde réglé H_2 dont trois génératrices d'un même mode sont d, a_1 et a_2.

---

(1) *Sur une transformation des droites de l'espace en surfaces du quatrième ordre* (*Bull. de l'Acad. royale de Belgique*, janvier 1907).

Cette courbe est l'intersection de H_2 et d'une surface S_6 correspondant à un plan passant par d. Ces surfaces ont en commun deux droites doubles a_1, a_2 et une droite simple appartenant à G et située dans le plan choisi. La courbe est donc de l'ordre

$$2 \times 6 - 2 \times 2 - 1 = 7.$$

Désignons-la par c_7.

Il est facile de voir que c_7 passe par les huit points d'intersection de H_2 et de c_4 et qu'elle rencontre quatre fois chacune des droites a_1, a_2.

Donc : *la transformée d'une droite est une courbe c_7 d'ordre sept rencontrant quatre fois chacune des droites a_1, a_2 et en huit points la courbe c_4.*

On a ainsi sur une surface S_6 une double infinité de courbes c_7 et sur une quadrique H_2 une simple infinité de courbes c_7.

5. Recherchons le lieu des points doubles de la transformation, c'est-à-dire le lieu des points de contact des quadriques du faisceau φ et des droites de la congruence G.

Nous avons vu que la surface S_6 possédait une droite située dans le plan π. L'intersection de S_6 avec π se compose donc d'une droite et d'une quintique s'appuyant sur a_1, a_2, et c_4, en quatre points. De là :

Le lieu des points doubles de la transformation est une surface du cinquième ordre S_5 *passant par a_1, a_2 et la courbe c_4.*

On peut en conclure :

La courbe c_7 s'appuie en cinq points sur la droite d.

[K8f]

SUR LES QUADRANGLES DE DESBOVES;

Par M. G. FONTENÉ.

Les côtés d'un quadrangle plan ABCD étant désignés comme il suit :

$$AB = a, \qquad BC = b, \qquad CD = c,$$
$$DA = d, \qquad AC = e, \qquad BD = f,$$

j'ai proposé d'appeler *quadrangles de Desboves* les quadrangles *non inscriptibles* pour lesquels on a

$$\frac{e}{f} = \frac{da + bc}{dc + ab}, \qquad \text{ou} \qquad fbc - ecd + fda - eab = 0.$$

Si l'on fait une inversion de pôle D, la relation précédente

$$DB.DC \times BC - DC.DA \times CA + DA.DB \times AB - BC.CA.AB = 0$$

donne

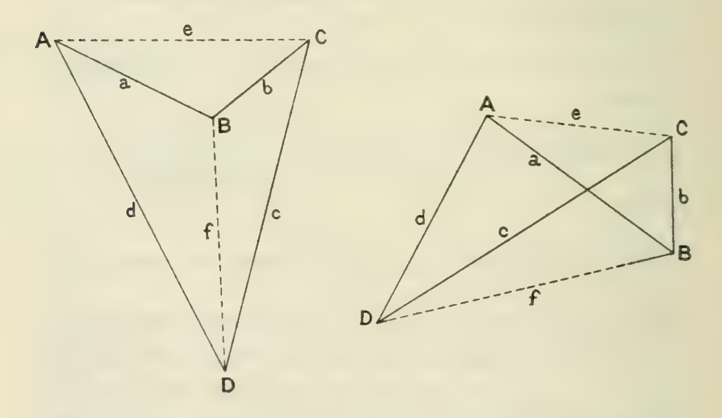
$$\overline{DA'}^2 \times B'C' - \overline{DB'}^2 \times C'A' + \overline{DC'}^2 \times A'B' = B'C'.C'A'.A'B',$$

sans que les points A', B', C' *soient en ligne droite.*

Or, si l'on suppose donnés les points A', B', C' non en ligne droite, le lieu des points D qui satisfont à la relation précédente est une circonférence ayant pour centre le barycentre des points A', B', C' affectés des coefficients a', $-b'$, c', en désignant par a', b', c' les côtés du triangle A'B'C', c'est-à-dire une circonférence ayant pour centre le centre du cercle exinscrit situé dans l'angle B'; cette circonférence passe par les deux points en lesquels le cercle circonscrit au triangle A'B'C'

est rencontré par la droite qui joint les pieds des bissectrices des angles A′ et C′ et le pied de la bissectrice de l'angle extérieur en B′. (La recherche du lieu précédent faisait partie de la question de Mathématiques élémentaires posée au Concours d'agrégation en 1906; le fait que cette circonférence passe par les deux points qui ont été indiqués est emprunté à la solution qui a paru dans le *Bulletin de Mathématiques élémentaires.*)

Ce qui précède donne le moyen de construire un quadrangle de Desboves en partant d'un triangle A′B′C′ et en faisant une inversion de pôle D, le point D étant pris sur la circonférence dont on vient de parler. On reconnaît ainsi qu'un tel quadrangle peut affecter l'une ou l'autre des deux formes suivantes :



Lorsque le contour ABCD *est convexe, l'hypothèse*

$$\frac{e}{f} = \frac{da + bc}{dc + ab}$$

correspond nécessairement à un quadrangle inscriptible.

Note. — Je ne sais si l'on a remarqué que l'hypothèse

$$ef = ac + bd,$$

faite sur un quadrangle ABCD *qu'on ne suppose pas être* a priori *un quadrangle plan,* entraîne pour ce quadrangle la nécessité d'être plan et inscriptible à un cercle. En effet, si l'on effectue une inversion de pôle D, la relation précédente

$$\mathrm{DB.CA} = \mathrm{DC.AB} + \mathrm{DA.BC}$$

donne pour les points inverses

$$\mathrm{C'A'} = \mathrm{A'B'} + \mathrm{B'C'},$$

ce qui exige que les points A', B', C' soient en ligne droite; dès lors, les quatre points A, B, C, D sont à un cercle.

[K14c]

SYMÉTRIE DES POLYÈDRES RÉGULIERS [1];

PAR M. G. FONTENÉ.

1. Les polyèdres réguliers, *à l'exception du tétraèdre* que nous laisserons de côté dans tout ce qui suit, ont un centre de symétrie.

2. *Soient* P *un plan,* X *une perpendiculaire à ce plan qui le perce en* O; *si une figure admet comme*

---

(1) Cette Note a été inspirée par la lecture du *Traité de Géométrie* de M. Borel (premier et second cycles), où sont étudiées les symétries du cube et de l'octaèdre réguliers.

éléments de symétrie deux des trois éléments P, X, O, *elle admet aussi le troisième.* En ce qui concerne l'axe X, il s'agit bien entendu dans cet énoncé de symétrie binaire.

Il suit de là que les plans de symétrie des polyèdres réguliers sont les plans menés par le centre perpendiculairement aux axes d'ordre pair.

3. Un polyèdre régulier étoilé admettant les mêmes symétries que le polyèdre convexe qui a les mêmes sommets ou les mêmes plans de faces, *on peut se borner à la considération des polyèdres réguliers convexes.*

4. Soit un tel polyèdre. Le nombre des faces est F, et chaque face contient x arêtes ; le nombre des sommets est S, et chaque angle polyèdre a y arêtes; le nombre des arêtes est A ; on a

$$Fx = Sy = 2A, \qquad F + S = A + 2.$$

Le polyèdre admet

$\frac{F}{2}$ axes d'ordre x,

$\frac{S}{2}$ » y,

$\frac{A}{2}$ » 2,

selon qu'une face, un angle polyèdre ou une arête doit admettre l'axe considéré. Ces axes sont distincts, comme on s'en assure aisément.

Il n'y en a pas d'autres. En effet, le nombre de façons dont le polyèdre peut être mis en coïncidence avec lui-même est évidemment Fx, ou encore Sy, ou

encore 2A. Or, en partant d'une position fondamentale, le nombre des positions nouvelles qu'on peut obtenir par rotation autour des axes considérés est

$$\tfrac{1}{2}[F(x-1)+S(y-1)+A]$$

ou

$$\tfrac{1}{2}[4A-A-2+A]$$

ou

$$2A-1,$$

et ces positions sont distinctes. Les axes de symétrie indiqués sont donc les seuls qui existent, puisqu'un nouvel axe devrait, à partir de la position fondamentale, conduire à une position nouvelle.

5. Parmi les polyèdres réguliers étoilés, le dodécaèdre à faces pentagonales étoilées et à sommets trièdres, l'icosaèdre à faces triangulaires et à sommets pentaèdres étoilés, se comportent absolument, au point de vue de leurs symétries, comme les polyèdres convexes qui leur correspondent.

6. Le polyèdre qui a 12 faces pentagonales convexes et 12 angles pentaèdres étoilés, et celui qui a 12 faces pentagonales étoilées et 12 angles pentaèdres convexes, polyèdres qui ont 30 arêtes, satisfont à la relation

$$F-S=A-2-8$$

et sont de *genre* 4. Ils admettent :

6 axes d'ordre 5, qui correspondent à la fois aux faces et aux sommets ;

10 axes ternaires, qui correspondent aux faces de l'icosaèdre de mêmes sommets, ou encore aux sommets du dodécaèdre qui a les mêmes plans de faces ;

15 axes binaires, qui correspondent aux arêtes.

[O5iα]

NOTE SUR LES SURFACES DE MONGE;

Par M. J. HAAG,
Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Douai.

Les surfaces de Monge sont, comme on sait, les surfaces dont les normales sont tangentes à une développable, ou encore qui admettent une famille de géodésiques planes ou, ce qui revient au même, une famille de lignes de courbure géodésiques. On retrouve ces surfaces comme solutions des deux problèmes que nous allons exposer.

Premier problème. — *Considérons deux surfaces* S *et* S_1 *qui admettent même représentation sphérique de leurs lignes de courbure. Soient* M *et* M_1 *deux points correspondants. Proposons-nous de chercher si la congruence des droites* MM_1 *peut être une congruence de normales.*

A cet effet, nous allons appliquer la méthode du trièdre mobile.

Rapportons la surface S à ses lignes de courbure et prenons, comme d'habitude, l'axe des x du trièdre (T) tangent à la courbe $v =$ const.

Nous ferons d'abord la remarque suivante : les plans focaux de la congruence MM_1 passent respectivement par Mx et My.

Pour qu'ils soient rectangulaires, il faut et suffit que M_1 se trouve dans l'un des deux plans zMx, zMy.

Supposons-le, par exemple, dans le plan des zx et soient (x, o, z) les coordonnées de M_1 relativement au trièdre (T). Écrivons que, pour $dv = o$, le point M_1 a un déplacement élémentaire parallèle à Mx. Les projections de ce déplacement sont, avec les notations usuelles (*voir* Darboux, *Théorie des surfaces,* t. II, p. 385 et 386),

$$\begin{aligned} D_x &= dx + A\,du + qz\,du, \\ D_y &= rx\,du, \\ D_z &= dz - qx\,du. \end{aligned}$$

Il faut, en particulier, qu'on ait $D_y = o$, d'où

$$r = o,$$

en excluant le cas où S_1 serait parallèle à S.

On déduit de là $\frac{\partial A}{\partial v} = o$, et, par suite, les lignes $v =$ const. sont des géodésiques. Comme elles sont lignes de courbure, *la surface* S *est une surface de Monge.*

Il est aisé de voir que les surfaces S_1 correspondantes, ainsi que les surfaces admettant pour normales les droites MM_1 sont aussi des surfaces de Monge dont la nappe développable de la surface des centres de courbure est la même que pour S.

Second problème. — *Déterminer toutes les surfaces qui admettent plusieurs déformations conservant les lignes de courbure.*

Adoptons encore la méthode du trièdre mobile. Il s'agit de trouver des fonctions A et C de u et v, telles que le système (A), de la page 386 citée plus haut, admette plusieurs solutions en p, q, p_1, q_1. Or, ce

système se réduit à

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} &= - q p_1, \\ \frac{\partial p_1}{\partial u} &= - q r_1, \\ \frac{\partial q}{\partial v} &= r p_1. \end{aligned}\right.$$

Il faut déterminer r et r_1 pour qu'il admette plusieurs solutions en p_1 et q. Posons à cet effet

$$M = \frac{\partial r_1}{\partial u} - \frac{\partial r}{\partial v}.$$

On a

$$p_1 = \frac{M}{q},$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{q}\frac{\partial M}{\partial u} - \frac{M}{q^2}\frac{\partial q}{\partial u} + q r_1 &= 0, \\ \frac{\partial q}{\partial v} &= r\frac{M}{q}, \end{aligned}\right.$$

ou, en posant $q^2 = \theta$,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} &= 2\theta \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial u} - \frac{2 r_1}{M}\theta^2, \\ \frac{\partial \theta}{\partial v} &= 2 r M. \end{aligned}\right.$$

Exprimons la condition d'intégrabilité ; il vient, tous calculs faits,

$$\theta^2 \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{r_1}{M}\right) - \theta\left(\frac{\partial^2 \log M}{\partial u\, \partial v} - 4 r r_1\right) - r\frac{\partial M}{\partial u} - M\frac{\partial r}{\partial u} = 0.$$

Si cette condition n'est pas satisfaite identiquement, il ne pourra pas y avoir plusieurs solutions pour le système (2). Nous devons donc avoir

$$(3)\qquad \frac{r_1}{M} = U, \qquad \frac{r}{M} = V, \qquad \frac{\partial^2 \log M}{\partial u\, \partial v} - 4 r r_1 = 0,$$

et, alors, il y aura pour le système (2) et, par suite, pour le système (1), une infinité de solutions dépendant d'une constante arbitraire.

Étudions maintenant le système (3), auquel il faut joindre l'équation

$$(4)\qquad \frac{\partial r_1}{\partial u} - \frac{\partial r}{\partial v} = \mathrm{M}.$$

Si l'on pose $\mathrm{M} = e^{\mu}$, on déduit de (3) et (4) les deux équations suivantes :

$$(5)\qquad \mathrm{U}\frac{\partial \mu}{\partial u} - \mathrm{V}\frac{\partial \mu}{\partial v} + \mathrm{U}' - \mathrm{V}' - 1 = 0,$$

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 \mu}{\partial u\,\partial v} + 4\mathrm{UV}e^{2\mu} = 0.$$

Différentions (5) par rapport à v, il vient, en tenant compte de (6),

$$-4\mathrm{U}^2\mathrm{V}e^{2\mu} - \mathrm{V}'\frac{\partial \mu}{\partial v} - \mathrm{V}\frac{\partial^2 \mu}{\partial v^2} - \mathrm{V}'' = 0.$$

Différentions cette équation par rapport à u, en tenant compte de (6) :

$$-8\mathrm{UU}'\mathrm{V}e^{2\mu} - 8\mathrm{U}^2\mathrm{V}e^{2\mu}\frac{\partial \mu}{\partial u} + 4\mathrm{UVV}'e^{2\mu} + 4\mathrm{V}\left(\mathrm{UV}'e^{2\mu} + 2\mathrm{UV}e^{2\mu}\frac{\partial \mu}{\partial v}\right) = 0$$

ou, en divisant par $8e^{2\mu}$,

$$\mathrm{UV}\left(\mathrm{U}\frac{\partial \mu}{\partial u} - \mathrm{V}\frac{\partial \mu}{\partial v} + \mathrm{U}' - \mathrm{V}'\right) = 0.$$

En tenant compte de (5), cette équation se réduit à

$$\mathrm{UV} = 0.$$

Supposons, par exemple, $\mathrm{U} = 0$. On en déduit $r_1 = 0$ et, comme dans le problème précédent, on en

conclut qu'on a affaire à une surface de Monge. Mais, ici, on a une surface de Monge particulière.

Nous avons, en effet,

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u} = \frac{2}{M}\frac{\partial M}{\partial u} = \frac{2}{r}\frac{\partial r}{\partial u},$$

d'où

$$\frac{\theta}{r^2} = V_1^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{q}{r} = V_1.$$

Comme $p = 0$, on en déduit que l'axe instantané du trièdre (T) est fixe par rapport à ce trièdre quand $v =$ const. Il a donc une direction fixe dans l'espace. Comme il est dans le plan zOy, ce plan enveloppe un cylindre quand u seul varie. Mais c'est précisément le plan des courbes $u =$ const., c'est-à-dire des géodésiques planes. Comme ce plan doit envelopper une développable, quels que soient u et v, cette développable est le cylindre précédent. *Nous avons donc une surface moulure.*

On pourrait continuer l'étude du problème ; mais c'est inutile, car on sait que toute surface moulure admet une infinité de déformations conservant les lignes de courbure. M. Darboux a indiqué les formules définissant ces déformations (voir *Théorie des surfaces,* t. I, p. 105). Nous venons d'établir que *ces déformations sont les seules conservant les lignes de courbure.*

[O6K]

DÉFORMATIONS CONSERVANT LA DIRECTION DES PLANS TANGENTS ;

PAR M. J. HAAG.

Dans une Note parue en octobre dernier dans les *Nouvelles Annales*, j'ai démontré incidemment qu'on ne peut pas déformer une sphère de telle façon que le plan tangent en chaque point demeure parallèle à lui-même. Il est facile de voir qu'il n'y a que les surfaces minima qui jouissent de cette propriété.

Soient, en effet, deux surfaces S et S_1 applicables l'une sur l'autre, avec correspondance des plans tangents parallèles. Rapportons-les au réseau conjugué commun, en négligeant le cas où ce réseau se réduirait à une famille de lignes asymptotiques, hypothèse qui conduit à deux surfaces égales ou symétriques. On a alors

$$(1) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial u} = \lambda \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \mu \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Écrivons que les deux surfaces sont applicables. On obtient

$$\lambda^2 E = E, \qquad \lambda\mu F = F, \qquad \mu^2 G = G.$$

Premier cas : EF $\neq$ o. — On a nécessairement

$$\lambda^2 = \lambda\mu = 1, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda = \mu = \pm 1.$$

Les surfaces S et S_1 sont alors égales ou symétriques.

Deuxième cas : $F = 0$. — On a la nouvelle solution

$$\lambda = 1, \qquad \mu = -1.$$

Mais, en éliminant x entre les équations (1), il vient

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

De même pour y et z. D'où

$$x = U + V, \qquad y = U_1 + V_1, \qquad z = U_2 + V_2,$$
$$x_1 = U - V, \qquad y_1 = U_1 - V_1, \qquad z_1 = U_2 - V_2.$$

La surface S, par exemple, est une surface de translation par rapport à ses lignes de courbure. On en déduit aisément que c'est un cylindre et que S_1 est un cylindre égal ou symétrique.

Troisième cas : $E = 0$, $G = 0$. — On a l'unique condition

$$\lambda \mu = 1.$$

Mais, dans ce cas, les lignes de longueur nulle sont conjuguées. On a donc deux surfaces minima. Elles sont d'ailleurs associées. En effet, on a

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = 0, \qquad \frac{\partial^2 x_1}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

En combinant ces deux équations avec les équations (1), on obtient

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial u} = 0.$$

D'où

$$\lambda = e^{\theta}, \qquad \mu = e^{-\theta}, \qquad \theta = \text{const}.$$

Si l'on pose alors

$$x = U + V, \qquad y = U_1 + V_1, \qquad z = U_2 + V_2,$$

on en déduit

$$x_1 = e^{\theta} U + e^{-\theta} V, \quad y_1 = e^{\theta} U_1 + e^{-\theta} V_1, \quad z_1 = e^{\theta} U_2 + e^{-\theta} V_2,$$

formules qui définissent bien une des surfaces minima associées à la surface minima S.

Il resterait le cas de E = o, F = o, qui donnerait des surfaces imaginaires peu intéressantes.

En résumé, *il n'y a que les surfaces minima associées qui répondent à la question que nous nous étions posée*.

Remarquons, en terminant, que ce problème est un cas particulier du problème de Christoffel, qui conduit, comme on sait, aux surfaces minima et aux surfaces isothermiques.

[O5jα]

SUR UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES SURFACES DE RÉVOLUTION;

PAR M. TR. LALESCO.

Dans une Note récente publiée dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (2ᵉ série, t. XXXI, p. 269), M. G. Tzitzéica a démontré une intéressante propriété comme étant *caractéristique* des surfaces de révolution. Elle peut s'énoncer de la manière suivante :

Sur toutes les lignes asymptotiques d'une surface de révolution, on a la relation

$$s = \pm f(r) + C,$$

r étant la distance de ses points à un point fixe et

s l'arc de l'asymptotique compté à partir d'une origine arbitraire.

Je veux donner ici une autre démonstration plus rapide qui nous permettra aussi de signaler un cas d'exception.

Prenons comme origine le point fixe et sur la surface comme lignes coordonnées les courbes $r =$ const. et leurs trajectoires orthogonales. L'élément linéaire de la surface s'écrira

$$(1) \qquad ds^2 = \mathrm{A}^2 dr^2 + \mathrm{C}^2 du^2.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques est alors

$$(2) \qquad ds^2 - f'^2(r)\,dr^2 = [\mathrm{A}^2 - f'^2(r)]\,dr^2 + \mathrm{C}^2 du^2 = 0,$$

ce qui montre que les lignes de coordonnées sont justement les lignes de courbure de la surface.

Les relations

$$(2') \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial r} = a\frac{\partial \theta}{\partial u} - b\frac{\partial \theta}{\partial r} \qquad (\theta = x, y, z)$$

nous donnent

$$\mathrm{S}\, x\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial r} = a\,\mathrm{S}\, x\frac{\partial x}{\partial u} + b\,\mathrm{S}\, x\frac{\partial x}{\partial r},$$

d'où, puisque

$$\mathrm{S}\, x\frac{\partial x}{\partial u} = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}\, x\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\mathrm{S}\, x\frac{\partial x}{\partial u} - \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial r} = 0,$$

il résulte

$$b = \frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u} = 0.$$

On a donc

$$\mathrm{A} = \varphi(r).$$

Des relations (1) et (2) on a immédiatement

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'} = \frac{\varphi^2(r)}{[\varphi^2(r) - f'^2(r)]},$$

R et R′ désignant les rayons de courbure principaux, à condition toutefois que $\varphi^2(r) - f'^2(r) \neq 0$.

D'autre part, la relation bien connue et fondamentale

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{A}{R}\right) = \frac{1}{R'}\frac{\partial A}{\partial u}$$

montre que R ne dépend que de r; il en résulte, à cause de (3), que R′ dépend également de r seul.

Le rayon de courbure principal le long des courbes $r = \text{const.}$ étant dès lors constant, la surface est l'enveloppe d'une sphère dépendant d'un paramètre variable; les courbes caractéristiques sont justement les courbes $r = c$ qui sont ainsi des cercles. La tangente à la courbe décrite par le centre de cette sphère devant passer dans chacune de ses positions par le point O (car la caractéristique doit être située aussi sur une sphère de centre O), cette courbe doit se réduire à une droite. Donc la surface est de révolution.

Les conclusions précédentes ne sont plus applicables si

$$\varphi(r) = \pm f'(r).$$

Dans ce cas-ci, on a $R = \infty$; un des systèmes de lignes de courbure est donc formé par des droites, qui passent nécessairement par l'origine, comme cela résulte immédiatement des relations (2′). La surface est donc, dans ce cas particulier, un cône quelconque et elle jouit évidemment de la propriété établie plus haut, car on a, le long des génératrices, qui sont ses lignes asymptotiques,

$$s = r.$$

CORRESPONDANCE.

M. **G. Fontené.** — Le Volume des *Nouvelles Annales* pour 1854 contient une Note de Sylvester qui appellerait de nouvelles recherches. Étant donné un tétraèdre dont les sommets sont a, b, c, d, si $\sqrt{F}$, $\sqrt{G}$, $\sqrt{H}$, $\sqrt{K}$ désignent les expressions des aires des faces en fonction des arêtes, l'expression

$$\begin{aligned} N = {} & (\sqrt{F} + \sqrt{G} + \sqrt{H} + \sqrt{K})(\sqrt{F} + \sqrt{G} - \sqrt{H} - \sqrt{K})(\ldots)(\ldots) \\ & \times(-\sqrt{F} + \sqrt{G} + \sqrt{H} + \sqrt{K})(\sqrt{F} - \sqrt{G} + \sqrt{H} + \sqrt{K})(\ldots)(\ldots) \end{aligned}$$

contient en facteur l'expression V^2 du carré du volume, et, si l'on pose

$$N = V^2 Q,$$

on a, à un facteur numérique près,

$$\begin{aligned} Q = \sum ab^2.bc^2.ca^2 & \left[\begin{array}{l} da^4 + db^4 + dc^4 \\ -(da^2 + db^2 + dc^2)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \\ + ab^2.bc^2 + bc^2.ca^2 + ca^2.ab^2 \end{array}\right] \\ & + 2\sum db^2.ca^2 \times dc^2.ab^2(da^2 - bc^2); \end{aligned}$$

on peut supprimer le second sigma en introduisant dans le crochet du premier les termes $da^2.db^2 + db^2.dc^2 + dc^2.da^2$.

Lorsque Q est nul, l'une des sphères exinscrites situées dans les espaces nommés *combles* a un rayon infini.

Sylvester conjecture que la fonction Q est un déterminant et que, en désignant par Q′ la fonction analogue pour le tétraèdre $a'b'c'd'$, le produit QQ′, et peut-être $\sqrt{QQ'}$, est une fonction des carrés des distances des sommets des tétraèdres, comme pour le théorème de Staudt.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2081.

Construire une hyperbole bitangente à deux cercles et ayant un axe transverse de longueur donnée.

(M. TÉTU.)

SOLUTION

Par M. Pierre FAVRE.

Si l'on considère, sans le construire, un hyperboloïde de révolution circonscrit aux deux sphères admettant les cercles donnés pour grands cercles, et dont le rayon du cercle de gorge est la moitié de la longueur donnée : tout plan tangent en un point du cercle de gorge coupe les deux sphères ci-dessus suivant deux cercles dont on connaît les centres et dont il est facile de construire les rayons.

Il suffit de mener les tangentes communes, soit intérieures, soit extérieures, à ces deux cercles, pour avoir les asymptotes *en position* de l'hyperbole méridienne cherchée.

Ce procédé donne donc deux solutions.

Autre solution par M. V. HIOUX.

2082.

On considère sur une courbe un point d'inflexion O *et un point voisin* M. *Si l'on désigne par* R_1 *le rayon du cercle osculateur en* M, *par* R_2 *le rayon du cercle qui est tangent à la courbe en* M *et qui passe en* O, *par* R_3 *le rayon du cercle qui passe en* M *et qui est tangent à la courbe en* O; *les rayons* R_1, R_2, R_3 *tendent à devenir inversement proportionnels aux nombres* 3, 2, 1, *lorsque le point* M *tend à se confondre avec le point* O.

(G. FONTENÉ.)

SOLUTION

Par M. Tétu.

Je rapporte la courbe à deux axes rectangulaires tels que Ox soit la tangente d'inflexion et Oy la perpendiculaire à celle-ci en O.

L'équation de la courbe est

$$y = Ax^3 + x^4 \times \varphi(x).$$

On a, dès lors,

$$R_1 = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{(1+9A^2x^4+\ldots)^{\frac{3}{2}}}{6Ax}.$$

Je n'écris pas les termes contenant en facteur des puissances supérieures de x. Calculons R_2. Si a et b sont les coordonnées du centre du cercle, on a

$$\left\{\begin{aligned} x^2+y^2-2ax-2by &= 0, \\ y' &= -\frac{x-a}{y-b}, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} 2ax+2by &= x^2+y^2, \\ a+by' &= x+yy', \end{aligned}\right.$$

d'où

$$a = \frac{(x^2-y^2)y'-2xy}{2(xy'-y)},$$

$$b = \frac{x^2-y^2+2xyy'}{2(xy'-y)},$$

ce qui donne

$$R_2 = \sqrt{a^2+b^2} = \frac{(x^2+y^2)\sqrt{1+y'^2}}{2(xy'-y)}$$

$$= \frac{(x^2+A^2x^6+\ldots)(1+9A^2x^4+\ldots)}{4Ax^3+\ldots} = \frac{1+10A^2x^4+\ldots}{4Ax}.$$

Calculons R_3. R_3 est donné par l'équation

$$x^2+y^2-2R_3y = 0,$$

$$R_3 = \frac{x^2+y^2}{2y} = \frac{1+A^2x^4+\ldots}{2Ax+\ldots};$$

R_1, R_2, R_3 sont donc des infiniment grands respectivement

équivalents à

$$\frac{1}{6\Lambda x}, \quad \frac{1}{4\Lambda x}, \quad \frac{1}{2\Lambda x},$$

ce qui montre que ces quantités sont inversement proportionnelles aux nombres 3, 2, 1.

2083.

Soient S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 *cinq semi-sphères. S'il existe une semi-sphère tangente, d'une part, aux deux semi-plans qui touchent* S_1, S_2, S_3, *et inscrite, d'autre part, au semi-cône de révolution circonscrit à* S_4 *et* S_5, *on peut obtenir neuf semi-sphères analogues en permutant de toutes les manières possibles les rôles assignés aux semi-sphères* S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. (R. B.)

SOLUTION
Par l'AUTEUR.

Pour bien faire comprendre le principe de la solution, je commencerai par démontrer la proposition analogue de géométrie plane :

Soient C_1, C_2, C_3, C_4 *quatre cycles dans le même plan. S'il existe un cycle touchant les tangentes communes à* C_1 *et* C_2 *et les tangentes communes à* C_3 *et* C_4, *on peut obtenir deux cycles analogues en permutant de toutes les manières possibles les rôles assignés aux cycles* C_1, C_2, C_3, C_4.

La démonstration est immédiate en ayant recours à la représentation d'un cycle par un point de l'espace : prenons trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz tels que le plan Oxy contienne les quatre cycles donnés. Soient x_i, y_i les coordonnées du centre du cycle C_i, et R_i son rayon (ce dernier étant affecté d'un signe, puisqu'il s'agit d'un cycle). On représentera le cycle C_i par le point de l'espace P_i de coordonnées x_i, y_i, R_i. On voit que le point P_i est le sommet d'un cône de révolution d'angle droit qui passe par le cycle C_i.

Le lieu des points représentatifs des cycles tangents aux tangentes communes à C_i et C_2 est une droite. En effet, tous ces cycles sont homothétiques par rapport au centre de similitude des cycles C_1 et C_2, et il en est de même des cônes de révolution d'angle droit qui les contiennent.

Si donc les quatre cycles satisfont à la condition de l'énoncé, la droite qui joint les points représentatifs des cycles C_1 et C_2 doit rencontrer la droite qui joint les points représentatifs des cycles C_3 et C_4. Cela revient à dire que les quatre points représentatifs sont dans un même plan. Cette propriété étant symétrique par rapport aux quatre cycles, la proposition énoncée en résulte.

Démontrons maintenant l'énoncé 2083.

Ayant pris trois axes rectangulaires quelconques, désignons par x_i, y_i, z_i, R_i les coordonnées du centre et le rayon de la semi-sphère S_i. On représentera cette dernière par le point de l'espace à quatre dimensions, de coordonnées x_i, y_i, z_i, R_i.

Cela posé, quand une semi-sphère varie en restant tangente à deux semi-plans fixes, son centre décrit un plan passant par la droite commune aux deux semi-plans, et son rayon est proportionnel à la distance de son centre à cette même droite. Il existe donc deux relations linéaires entre les coordonnées de son centre et son rayon. Cela revient à dire que *son point représentatif dans l'espace à quatre dimensions décrit un plan*.

Quand une semi-sphère varie en restant inscrite à un semi-cône de révolution, son centre décrit une droite passant par le sommet de ce semi-cône, et son rayon est proportionnel à la distance de son centre à ce même sommet. Il existe donc trois relations linéaires entre les coordonnées de son centre et son rayon. Cela revient à dire que *son point représentatif dans l'espace à quatre dimensions décrit une droite*.

Il résulte alors de l'énoncé que la *droite* joignant les points représentatifs des semi-sphères S_4, S_5 rencontre le *plan* passant par les points représentatifs des semi-sphères S_1, S_2, S_3. Par conséquent, les cinq points représentatifs sont dans un même *espace linéaire*, et la droite joignant deux quelconques d'entre eux rencontre le plan qui passe par les trois autres. On en conclut immédiatement la proposition énoncée.

2086.

(1907, p. 528.)

Soit OCA *un triangle rectangle en* C *et tel que* CA = CO ; *sur* OC, *à partir du point* O, *et du côté du point* C, *on prend* OS = OA *et l'on mène par* O *une parallèle à* AS *qui rencontre en* B *le prolongement de* AC.

AS *est le côté et* CB *l'apothème du pentagone régulier inscrit dans le cercle de rayon* CA.

CS *est la hauteur d'une pyramide régulière à base pentagonale et telle que l'arête* SA *est égale au côté de la base :* OS *est le rayon de la sphère circonscrite à cette pyramide.*

AS *est le côté de l'icosaèdre régulier inscrit dans la sphère de rayon* OS ; SBO *est la moitié de l'angle dièdre de cet icosaèdre.* (E. Lacour.)

SOLUTION

Par M. Parrod.

Considérons la section de l'icosaèdre et de la sphère circonscrite par un plan passant par deux arêtes opposées SA, S'A', qui sont symétriques par rapport au centre de la sphère : elle se compose d'un hexagone SAB'S'A'B dont les côtés AB', B'S', A'B et BS sont égaux à la hauteur du triangle équilatéral de côté SA. L'angle SBA' est le rectiligne d'un dièdre du polyèdre, SBO en est la moitié.

Le diamètre SS' est perpendiculaire sur la base de la pyramide pentagonale de sommet S, il rencontre la trace AB de cette base en C ; donc, CS est la hauteur de cette pyramide. AS est le côté et CB est l'apothème du pentagone inscrit dans le cercle de rayon CA.

Abaissons la perpendiculaire OI sur AS et joignons AA' qui rencontre OB en K ; OB = OI est la distance du centre de la sphère aux différentes arêtes, OK est la moitié du côté SA.

Il reste à montrer que CA = 2CO : on a

$$CA.OS = 2\,SI.OI = 2\,OK.OB = 2\,OC.OS,$$

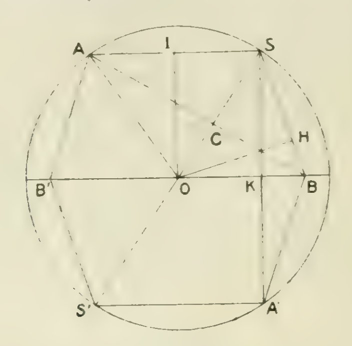
donc

$$CA = 2\,OC.$$

On retrouve ainsi une construction bien connue du côté du pentagone et du décagone inscrits dans un cercle de rayon donné.

CS est le côté du décagone inscrit dans le cercle de rayon AC.

On peut résumer ces différents résultats dans un triangle OSB dans lequel $SB = OK\sqrt{3}$ et $OB = SK$.



La troisième hauteur OH est la distance du centre de la sphère aux faces, H est au tiers de BS.

Pour construire un tel triangle, prenons un segment OB, menons une parallèle à la distance $\frac{OB}{3}$ et décrivons la circonférence de diamètre OB qui rencontre la parallèle en H; prolongeons BH en S tel que $BS = 3BH$ et joignons BS.

Relations. — On a facilement, en posant $OS = 1$,

$$\sin SBA' = \frac{2}{3}, \qquad \tang SOB = \sqrt{3} \sin SBO,$$

$$AC = 2OC = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \qquad CS = \frac{5-\sqrt{5}}{5},$$

$$SA = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}, \qquad OB = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}},$$

$$OH = \sqrt{\frac{10-4\sqrt{5}}{30}}, \qquad BC = \frac{5-\sqrt{5}}{10}.$$

Remarquons que $2BC + CS = 2$, *donc on a aussi*

$$CS' = 2CB.$$

Dodécaèdre. — Considérons de même la section par un plan passant par deux arêtes parallèles opposées SA, S'A'. Dans ce cas le point H serait le centre d'une face pentagonale, HB est l'apothème du pentagone inscrit dans un cercle de rayon HS.

Pour construire le triangle OSB donnant les éléments du dodécaèdre, nous mènerons une parallèle à OB à une distance d telle que $\frac{d}{\mathrm{OB}-d}$ soit égal au rapport de l'apothème au rayon d'un pentagone régulier, et l'on achèvera la construction comme dans le cas précédent.

Les angles et les segments se calculent sans difficulté.

Autre solution par M. Bros.

QUESTIONS.

2089. On considère dans le plan d'une courbe (M) un pôle O. Si n et t sont les points de rencontre respectifs de la normale et de la tangente en un point M de cette courbe avec la perpendiculaire élevée en O au rayon vecteur OM, et si l'on connaît la direction de la normale en t, au lieu de ce point t [*adjointe infinitésimale* (t) de M. d'Ocagne], on a une construction du centre de courbure μ, répondant au point M, sous les deux formes suivantes :

1° La parallèle menée, à la normale en t, par le point de rencontre α du rayon vecteur OM avec la perpendiculaire élevée en n à la normale Mn, coupe cette dernière au centre de courbure μ.

2° Si, au point de rencontre N de la normale Mn avec la parallèle menée par O à la normale en (t), on élève une perpendiculaire à Mn jusqu'à sa rencontre en un point V de OM, la perpendiculaire élevée en ce point V à OM coupe Mn au centre de courbure μ.

Appliquer cette construction, dans le cas particulier où la courbe (M) est une conique de foyer O.

(Farid Boulad.)

2090. Soient $\rho(\alpha, \beta, \gamma)$ un point fixe quelconque situé dans le plan du triangle ABC; θ le centre de la conique inscrite en α, β, γ; $\Delta(\lambda\mu\nu)$ la polaire de θ dans le triangle ABC, et Q la conique inscrite en A, B, C au triangle des droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$. Si un point $O(x, y, z)$ décrit Q :

1° La polaire ρ de O tourne autour de θ;

2° Le centre θ_1 de la conique inscrite à ABC en x, y, z décrit la polaire ρ_1 de P;

3° Les parallèles à PA, PB, PC menées par O coupent BC, CA, AB en λ', μ', ν', et l'on a la droite $\Delta'(\lambda'\mu'\nu')$;

4° Les parallèles à OA, OB, OC menées par P coupent BC, CA, AB en λ_1, μ_1, ν_1, et l'on a la droite $\Delta_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$;

5° Le point $\omega(\Delta', \Delta_1)$ est le milieu de OP et décrit la conique V qui passe par les milieux des côtés de ABC et les points α, β, γ;

6° Si P coïncide avec l'orthocentre H de ABC, θ est le point de Lemoine, Q le cercle ABC, Δ' la droite de Simson et V le cercle d'Euler. (P. Sondat.)

2091. Le nombre n étant supposé impair, démontrer que, si l'on évalue la quantité $\frac{\sin nx}{\sin x}$ en fonction de $\cos x$, l'expression obtenue est un produit de deux facteurs rationnels. Que représente chacun de ces facteurs? (G. F.)

ERRATA.

Page 19 : supprimer les figures.
Page 20, lignes 2 et 4 : supprimer les accents.

[Q1a]

ESSAI DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A UNE INFINITÉ DE COORDONNÉES;

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

Dans une communication au Congrès international des Mathématiciens de 1900 ([1]) M. Padoa a fait connaître qu'on pourrait définir tous les symboles qu'on rencontre dans la géométrie euclidienne à l'aide de deux seulement d'entre eux. Ces deux derniers sont les suivants : 1° le symbole *point;* 2° le symbole $(a, b) = (c, d)$, où a, b, c, d sont des points et qu'on doit lire : le couple de points a, b *est superposable* au couple de points c, d. D'après M. Padoa, on obtient la géométrie euclidienne quand on donne au symbole point la signification géométrique habituelle et au symbole $(a, b) = (c, d)$ le sens suivant : le couple de points *géométriques* a, b est superposable au couple de points *géométriques* (c, d). Mais il est bien entendu qu'on peut donner aux deux symboles non définis une signification quelconque et qu'alors les définitions suivantes s'appliqueront toujours, moyennant certains postulats.

Je me suis proposé de montrer qu'en donnant aux deux symboles non définis une signification que je vais préciser tout à l'heure, on obtient une généralisation remarquable de la géométrie analytique à trois dimensions. Cette étude me paraît présenter un intérêt :

([1]) *Un nouveau système de définitions pour la géométrie euclidienne* (*Comptes rendus du Congrès,* p. 353).

d'une part, en ce qui concerne les fondements de la Géométrie; d'autre part, dans la théorie des fonctions, comme je le montrerai plus loin.

Définition d'un point. — *Nous appellerons* point *une suite infinie de nombres* réels $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *qui seront, par définition, les coordonnées de rangs* 1, 2, ..., n, ... *du point et tels que la série* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots$ *soit convergente* (1).

Nous considérerons deux points comme distincts si leurs coordonnées de même rang ne sont pas toutes respectivement égales. Dans le cas contraire, les deux points coïncident et l'on voit que : 1° si a coïncide avec b, b coïncide avec a; 2° si a coïncide avec b et b avec c, a coïncide avec c.

Nous aurons à utiliser, pour la suite, la remarque suivante :

Si les séries à termes réels

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + \ldots,$$
$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 + \ldots$$

sont convergentes, il en est de même de la série

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n + \ldots.$$

Cela résulte immédiatement de l'inégalité évidente

$$|x_1 y_1| + \ldots + |x_n y_n| \leqq \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2 + y_1^2 + \ldots + y_n^2}{2}.$$

On en déduit facilement que, si $x_1, x_2, \ldots;$

(1) Cette définition provient d'une définition de M. Hilbert, modifiée par M. Riesz ; elle correspond dans la théorie des fonctions à l'introduction de la convergence *en moyenne* étudiée par M. Fischer. J'avais déjà étudié dans ma Thèse une autre définition de l'espace à une infinité de dimensions.

$y_1, y_2, \ldots; \ \ldots, u_1, u_2, \ldots$ peuvent être considérés comme les coordonnées de certains points $x, y, \ldots, u$ au sens indiqué plus haut, il en sera de même des nombres

$$\alpha x_1 + \beta y_1 + \ldots + \delta u_1, \quad \alpha x_2 + \beta y_2 + \ldots + \delta u_2, \quad \ldots,$$

où $\alpha, \beta, \ldots, \delta$ sont des constantes réelles quelconques. Nous désignerons alors le point correspondant par la notation : $\alpha x + \beta y + \ldots + \delta u$, où $\alpha, \beta, \ldots, \delta$ sont des nombres et $x, y, \ldots, u$ des points.

Définition de la distance. — Il est facile aussi de déduire de la remarque précédente que, si les séries $\sum x_i^2$, $\sum y_i^2$ convergent, il en est de même de $\sum (x_i - y_i)^2$.

Nous appellerons alors *distance* des deux points $x : (x_1, x_2, \ldots)$ et $y : (y_1, y_2, \ldots)$ la quantité bien définie positive ou nulle

$$(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots}.$$

On voit que : 1° $(x, y) = (y, x)$; 2° la condition nécessaire et suffisante pour que deux points coïncident est que leur distance soit nulle; 3° quels que soient les points x, y, z, on a

$$(x, y) \leqq (x, z) + (y, z)$$

et, par conséquent (en permutant x, y, z),

$$(x, y) \geqq |(x, z) - (y, z)| \quad (^1).$$

(1) Ceci permet de considérer (x, y) comme l'*écart* de x et y au sens défini dans ma Thèse [*Sur quelques points du calcul fonctionnel* (*Rendiconti del Circolo di Palermo*, 1906)] et, par conséquent, d'appliquer les théorèmes généraux qui y sont démontrés.

Alors nous adopterons pour le deuxième symbole non défini de M. Padoa la signification suivante :

Le couple de points a, b sera superposable au couple de points c, d si les distances (a, b), (c, d) *sont égales,* de sorte qu'on représentera ces deux circonstances identiques par le même symbole

$$(a, b) = (c, d).$$

Cette définition satisfait à la condition évidemment nécessaire que, si a, b coïncident, il en est de même de c, d, et réciproquement.

Nous allons maintenant suivre pas à pas les définitions de M. Padoa et en donner la traduction analytique qu'on obtient immédiatement pour quelques-unes, d'une façon moins simple pour d'autres.

Définition I. — *Si a, b sont des points distincts,* « *droite ab* » signifie : *figure à laquelle appartient chaque point x tel qu'il n'existe aucun point y distinct de x qui vérifie simultanément les conditions*

$$(a, y) = (a, x), \qquad (b, y) = (b, x).$$

Soient $a_1, a_2, \ldots$; $b_1, b_2, \ldots$ les coordonnées des points a, b. Les quantités $(b_1 - a_1)$, $(b_2 - a_2)$, ... ne seront pas toutes nulles ; soit, par exemple, $b_k - a_k \neq 0$. Appelons F la figure formée par tous les points dont les coordonnées peuvent s'écrire sous la forme

$$(1) \qquad a_1 + \lambda (b_1 - a_1), \quad a_2 + \lambda (b_2 - a_2), \quad \ldots,$$

où λ désigne une constante réelle quelconque. Autrement dit, appelons F l'ensemble des points vérifiant les équations

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \ldots,$$

dans lesquelles on prendra par convention le numérateur égal à zéro, quand le dénominateur sera nul.

Je veux démontrer que la *droite ab* existe et coïncide avec F.

Pour démontrer que la droite ab existe, il suffit de prouver qu'il y a des points satisfaisant à la définition I. Or, il suffit de remarquer que, si y est distinct de a, on a

$$(a,y) > 0, \qquad (a,a) = 0;$$

donc on n'a pas

$$(a,y) = (a,a).$$

Par suite, a est un point de la droite ab ; de même pour b. On voit d'ailleurs immédiatement que a, b font aussi partie de F.

Je dis maintenant que, si x n'est pas sur F, il existe au moins un point $y \neq x$, tel qu'on ait, à la fois,

$$(a,y) = (a,x), \qquad (b,y) = (b,x).$$

Pour cela, prenons pour y un point dont les coordonnées sont de la forme

$$y_1 = 2a_1 - x_1 + 2\mu(b_1 - a_1),$$
$$y_2 = 2a_2 - x_2 + 2\mu(b_2 - a_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où μ est une constante réelle. Ce point est certainement distinct de x, quel que soit μ, sans quoi x serait de la forme

$$a + \mu(b - a)$$

et, par suite, serait sur F.

Or, on a

$$(y,a)^2 - (x,a)^2 = 4\mu\left[\mu\sum(b_i - a_i)^2 + \sum(a_i - x_i)(b_i - a_i)\right],$$
$$(y,b)^2 - (x,b)^2 = 4(\mu - 1)\left[\mu\sum(b_i - a_i)^2 + \sum(a_i - x_i)(b_i - a_i)\right],$$

et l'on peut, puisque $\sum (b_i - a_i)^2 \neq 0$, choisir μ de façon à annuler le crochet, ce qui démontre la proposition. Alors, la droite (a, b) ne comprend que des points de F.

Réciproquement, tout point de F est sur la droite ab. Pour le prouver, nous allons d'abord démontrer que, si un point c n'est pas sur la droite ab, on a

$$|(a, c) - (b, c)| < (a, b) < (a, c) + (b, c).$$

En effet, quelle que soit la position de c, on a toujours

$$|(a, c) - (b, c)| \leqq (a, b) \leqq (a, c) + (b, c);$$

il suffit donc de montrer que l'égalité

$$(a, b) = \pm (a, c) \pm (b, c) \tag{2}$$

n'est possible que si c est sur F. Or, celle-ci est équivalente à la suivante :

$$[(a, c)^2 + (b, c)^2 - (a, b)^2]^2 = 4(a, c)^2 (b, c)^2.$$

Si c a pour coordonnées $c_1, c_2, \ldots$, cette égalité peut s'écrire

$$K \equiv \left[\sum (a_i - c_i)^2\right] \left[\sum (b_i - c_i)^2\right] - \left[\sum (a_i - c_i)(b_i - c_i)\right]^2 = 0.$$

D'autre part, le premier membre est la limite de

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{i=1}^{i=n} (a_i - c_i)^2 \sum_{i=1}^{i=n} (b_i - c_i)^2 - \left[\sum_{i=1}^{i=n} (a_i - c_i)(b_i - c_i)\right]^2 \\ &= \sum_{i=1;\, j=1}^{i=n;\, j=n} [(a_i - c_i)(b_j - c_j) - (a_j - c_j)(b_i - c_i)]^2. \end{aligned}$$

On voit qu'on a toujours

$$0 \leqq \sigma_1 \leqq \sigma_2 \leqq \ldots \leqq \sigma_n \leqq \ldots \leqq K.$$

Donc, pour que K soit nul, il faut que

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \ldots = \sigma_n = \ldots = 0,$$

ce qui nécessite qu'on ait, quels que soient les entiers i, j,

$$(3) \qquad (a_i - c_i)(b_j - c_j) - (a_j - c_j)(b_i - c_i) = 0$$

ou

$$(b_i - a_i)(c_j - a_j) - (b_j - a_j)(c_i - a_i) = 0,$$

et, comme $b_k - a_k \neq 0$, on a, en prenant $j = k$,

$$c_i - a_i = (b_i - a_i)\frac{c_k - a_k}{b_k - a_k}.$$

En définitive, on voit, en posant $\lambda = \frac{c_k - a_k}{b_k - a_k}$, que si l'égalité (2) est vérifiée, les coordonnées du point c peuvent s'écrire

$$c_1 = a_1 + \lambda(b_1 - a_1), \qquad c_2 = a_2 + \lambda(b_2 - a_2), \qquad \ldots,$$

c'est-à-dire que c est sur F. Réciproquement, si c est sur F, les égalités (3) sont vérifiées; par suite, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ sont nuls, donc aussi K, et l'on a l'égalité (2).

Démontrons encore un autre lemme. Considérons deux points de F distincts : y, c; leurs coordonnées seront de la forme (1) et ils correspondront à deux valeurs distinctes : λ', λ. Un calcul simple montre alors qu'on a

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (y, c) = |\lambda' - \lambda|(a, b), \qquad (y, a) = |\lambda'|(a, b), \\ \qquad\qquad (y, b) = |\lambda' - 1|(a, b), \\ (c, a) = |\lambda|(a, b), \qquad (c, b) = |\lambda - 1|(a, b). \end{array} \right.$$

Il résulte de ce qui précède que, si c est sur F, il

n'existe aucun autre point y distinct de c, tel que

$$(y, a) = (c, a), \qquad (y, b) = (c, b).$$

En effet, puisque c est sur F, on aurait, d'après les égalités (4),

$$(a, b) = \pm (a, y) \pm (b, y),$$

et y devrait être aussi sur F.

Mais alors, si λ' est la valeur de λ qui correspond à y, les égalités (4) donneraient

$$|\lambda'| = |\lambda|, \qquad |\lambda' - 1| = |\lambda - 1|,$$

d'où $\lambda = \lambda'$, et y ne serait plus distinct de c.

En résumé, nous avons démontré :

1° Que la droite ab coïncide avec F, c'est-à-dire a pour équation

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \ldots;$$

2° Que, si c est un point de la droite ab, on a

$$(a, b) = \pm (a, c) \pm (b, c);$$

3° Que, si c n'est pas sur la droite ab, on a

$$|(a, c) - (b, c)| < (a, b) < (a, c) + (b, c).$$

Il en résulte que, si a, b, c sont trois points distincts et si c est sur ab, a est sur bc et b est sur ac; la réciproque est vraie. On saura donc maintenant distinguer si trois points sont ou non *alignés*.

Passons maintenant aux autres définitions de M. Padoa, qui vont nous permettre de décider de la position de trois points en ligne droite.

Définition II. — *Si a et b sont deux points distincts,* « *milieu de ab* » signifie : *point c de la*

droite ab, tel que

$$(a, c) = (b, c).$$

Si c correspond à la valeur λ du paramètre, les formules précédemment démontrées prouvent qu'on devra avoir

$$|\lambda|(a, b) = |\lambda - 1|(a, b),$$

d'où

$$\lambda = \frac{1}{2},$$

et alors

$$c_i = \frac{a_i + b_i}{2} \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Ainsi, le milieu de ab existe, est unique et est représenté par

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

Définition III. — « *Sphère de centre a et passant par b* » signifie : *figure à laquelle appartient tout point* $\boldsymbol{x}$, *tel qu'on ait*

$$(a, x) = (a, b).$$

On a immédiatement l'équation de cette sphère,

$$\sum (a_i - x_i)^2 = \sum (a_i - b_i)^2;$$

on voit qu'elle existe et comprend même une infinité de points.

Il suffit de prendre, par exemple,

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \cos\lambda \sqrt{\sum (a_i - b_i)^2}, \\ x_2 &= a_2 + \sin\lambda \sqrt{\sum (a_i - b_i)^2}, \\ x_3 &= a_3, \\ x_4 &= a_4, \\ &\ldots\ldots, \end{aligned}$$

où λ est un paramètre arbitraire.

Définition IV. — « *Sphère qui a pour pôles a et b* » signifie : *sphère qui a pour centre le milieu de ab et qui passe par b.*

Son équation sera donc

$$\sum\left(x_i - \frac{a_i + b_i}{2}\right)^2 = \sum\left(b_i - \frac{a_i + b_i}{2}\right)^2 = \sum\left(\frac{b_i - a_i}{2}\right)^2.$$

Pour pouvoir définir plus facilement la position d'un point sur la droite ab, nous commencerons par appeler *cosinus directeurs de la direction positive* qui va de a vers b les quantités

$$\alpha_1 = \frac{b_1 - a_1}{(a, b)}, \qquad \alpha_2 = \frac{b_2 - a_2}{(a, b)}, \qquad \ldots,$$

qui, en valeur absolue, sont au plus égales à 1 et telles que

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots = 1.$$

Alors, si $c = a + \lambda(b - a)$ est un point quelconque de la droite ab, on pourra, en posant $\rho = \lambda(a, b)$, écrire ses coordonnées sous la forme

$$c_1 = a_1 + \rho\alpha_1, \qquad c_2 = a_2 + \rho\alpha_2, \qquad \ldots,$$

et l'on aura évidemment

$$(c, a) = |\rho|,$$

ce qui donne la signification géométrique du paramètre $|\rho|$.

De même, posons $\mu = \frac{\lambda}{1 - \lambda}$, et l'on aura

$$c_1 = \frac{a_1 + \mu b_1}{1 + \mu}, \qquad c_2 = \frac{a_2 + \mu b_2}{1 + \mu}, \qquad \ldots.$$

La signification de $|\mu|$ sera donnée par la formule

évidente

$$\frac{(c, a)}{(c, b)} = |\mu|.$$

Les définitions suivantes fixeront la signification géométrique des signes de ρ et de μ.

Définition V. — *Si c, d sont des points distincts sur la droite ab,* « (c, d) *n'entrelace pas* (a, b) » signifie : *la sphère de pôles a, b n'a aucun point commun avec la sphère de pôles c, d.*

Écrivons les points c, d sous la forme

$$c = \frac{a + \mu b}{1 + \mu}, \qquad d = \frac{a + \mu' b}{1 + \mu'}.$$

Il faudra que les équations suivantes n'aient pas de solutions communes :

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum \left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2, \\ \sum \left(x - \dfrac{c+d}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{c-d}{2}\right)^2 \end{array} \right.$$

ou

$$\sum (x - a)(x - b) = 0$$

et

$$\sum (x-a)^2 + (\mu + \mu') \sum (x-a)(x-b) + \mu\mu' \sum (x-b)^2 = 0.$$

Il faudra, en particulier, que l'équation

$$\sum (x-a)^2 + \mu\mu' \sum (x-b)^2 = 0$$

ne soit pas vérifiée, ce qui aura évidemment lieu si $\mu\mu' > 0$.

Cette condition suffisante est nécessaire. Il suffit de démontrer que, si $\mu\mu' \leqq 0$, les sphères (5) ont au moins un point commun.

En effet, si $\mu\mu' = 0$, elles ont évidemment en commun le point a; si $\mu\mu'$ est infini, elles ont en commun le point b.

Reste le cas où $\mu\mu'$ est fini et négatif. Appelons $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ les cosinus directeurs de la direction de a vers b et montrons d'abord qu'il existe un point X de la droite ab tel que

$$X_i = a_i + \gamma\alpha_i = b_i + \gamma'\alpha_i = c_i + \delta\alpha_i = d_i + \delta'\alpha_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots),$$

où γ, γ', δ, δ' sont quatre constantes réelles telles que

$$\delta\delta' = \gamma\gamma' < 0.$$

Pour cela il suffit de prendre $X = a + \gamma\alpha$ et de déterminer γ, γ', δ, δ' par les conditions

$$\gamma' = \gamma - \frac{b-a}{\alpha}, \qquad \delta = \gamma - \frac{c-a}{\alpha}, \qquad \delta' = \gamma - \frac{d-a}{\alpha},$$
$$\delta\delta' = \rho\rho',$$

qui deviennent

$$\gamma' = \gamma - (a, b), \qquad \delta = \gamma - \frac{\mu(a, b)}{1+\mu}, \qquad \delta' = \gamma - \frac{\mu'(a, b)}{1+\mu'}$$

et

$$\gamma[\gamma - (a, b)] = \left[\gamma - \frac{\mu(a, b)}{1+\mu}\right]\left[\gamma - \frac{\mu'(a, b)}{1+\mu'}\right].$$

D'où

$$\gamma = \frac{\mu\mu'(a, b)}{\mu\mu' - 1},$$

quantité bien déterminée, puisque $\mu\mu' - 1 < 0$.

On a bien alors

$$\gamma\gamma' = \mu\mu'\left[\frac{(a, b)}{\mu\mu' - 1}\right]^2 < 0$$

D'autre part, on peut évidemment choisir d'une infinité de manières des nombres réels β_1, β_2, ... tels que

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots = 0, \qquad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots = 1.$$

Je dis maintenant qu'on peut choisir le nombre réel t de façon que le point de coordonnées

$$x_1 = X_1 + t\beta_1, \qquad x_2 = X_2 + t\beta_2, \qquad \ldots$$

soit sur les sphères (5). En effet, on aura, d'après (6), pour ces valeurs des x_i,

$$\sum (x_i - a_i)(x_i - b_i) = t^2 + \gamma\gamma',$$

$$\sum (x_i - c_i)(x_i - d_i) = t^2 + \delta\delta',$$

et, comme $\gamma\gamma' = \delta\delta' < 0$, on pourra toujours prendre

$$t^2 + \gamma\gamma' = t^2 + \delta\delta' = 0.$$

En définitive, *pour que les points*

$$c = \frac{a + \mu b}{1 + \mu}, \qquad d = \frac{a + \mu' b}{1 + \mu'}$$

forment un couple (c, d) *qui n'entrelace pas* ab, *il faut et il suffit* que $\mu\mu'$ soit fini et positif.

Définition VI. — « *x est un point placé entre a et b* » signifie : *si m est le milieu de ab, x coïncide avec m ou est un point de la droite ab tel que mx n'entrelace pas ab.*

On a vu que

$$m = \frac{a + b}{2}$$

et que x est de la forme

$$\frac{a + \mu b}{1 + \mu}.$$

Donc, μ doit être positif, puisque m peut s'écrire

$$m = \frac{a + \mu' b}{1 + \mu'}$$

avec $\mu' = 1$ et que $\mu\mu'$ doit être positif d'après ce qu'on vient de prouver.

En définitive, pour que le point x soit placé entre a et b, il faut et il suffit qu'on puisse l'écrire sous la forme

$$x = \frac{a + \mu b}{1 + \mu},$$

où μ est un nombre fini et positif.

Ou bien encore, en posant $x = a + \rho\alpha$, où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ désignent les cosinus directeurs de la direction positive qui va de a vers b, il faut qu'on ait

$$0 < \rho < (a, b),$$

car on aura

$$\mu = \frac{\rho}{ab - \rho}.$$

Définition VII. — « *Segment ab* » signifie : *figure à laquelle appartiennent a, b et tout point placé entre a et b.*

D'après ce qui précède, le segment ab sera la figure formée par tous les points $x = a + \rho\alpha$, où ρ est un nombre réel tel qu'on ait

$$0 \leqq \rho \leqq (a, b).$$

Autrement dit, c'est le lieu des points x tels que

$$0 \leqq \frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \ldots \leqq 1.$$

Définition VIII. — « *Prolongement de ab vers b* » signifie : *figure à laquelle appartiennent tous les points x tels que b soit placé entre a et x.*

Il faut que

$$b = \frac{a + \mu x}{1 + \mu}$$

avec μ fini et positif.

On peut donc déterminer ρ de façon que $x = a + \rho\alpha$, en prenant

$$b = \frac{a + \mu(a + \rho\alpha)}{1 + \mu},$$

d'où

$$\rho = (a, b)\frac{1 + \mu}{\mu}$$

ou

$$\mu = \frac{(a, b)}{\rho - (a, b)}.$$

Ainsi, le prolongement de ab vers b est formé de tous les points

$$x = a + \rho\alpha$$

pour lesquels

$$\rho > (a, b).$$

Autrement dit, c'est le lieu des points x tels que

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \ldots > 1.$$

Définition IX. — « *Rayon ab* » signifie : *figure à laquelle appartient tout point du segment ab et du prolongement de ab vers b.*

Ce sera donc l'ensemble des points $x = a + \rho\alpha$ pour lesquels $\rho \geqq 0$, ou bien le lieu des points x tels que

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \ldots \geqq 0.$$

Définition X. — *Si c et d sont des points distincts sur la droite ab*, « *d suit c comme b suit a* » signifie : *le prolongement de ab contient le prolongement de cd ou celui-ci contient celui-là.*

Alors il faut que c, d soient des points de la droite ab tels que la valeur commune des rapports

$$\frac{d_1 - c_1}{b_1 - a_1} = \frac{d_2 - c_2}{b_2 - a_2} = \ldots$$

soit positive.

Définition XI. — « *Symétrique de a par rapport à b* » signifie : *point x tel que b est le centre de ax.*

On aura

$$\frac{a+x}{2} = b,$$

d'où

$$x = 2b - a;$$

le point x existe et est unique.

Définition XII. — « *ab est perpendiculaire à bc* » signifie : *b est un point de la sphère qui a pour pôles a et c.*

C'est-à-dire qu'on a

$$\sum (b_i - a_i)(b_i - c_i) = 0,$$

ou encore, en appelant $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, $(\beta_1, \beta_2, \ldots)$ les cosinus directeurs de la direction qui va de a vers b ou de b vers a et de la direction qui va de b vers c ou de c vers b,

$$\sum \alpha_i \beta_i = 0.$$

Définition XIII. — *Si d est un point distinct de c,* « (c, d) *est parallèle à* (a, b) » signifie : *le symétrique de a par rapport au centre de bc est un point de la droite cd.*

Autrement dit,

$$\left(2 \times \frac{b+c}{2} - a\right) = c + \lambda(d - c),$$

d'après la définition XI, ou

$$\frac{b_1 - a_1}{d_1 - c_1} = \frac{b_2 - a_2}{d_2 - c_2} = \ldots.$$

Définition XIV. — « *x est un point intérieur au triangle abc* » signifie : *x est un point distinct de a et il y a un point y du prolongement de ax qui est placé entre b et c.*

D'après ce qui précède, on aura

$$y = \frac{b + \mu c}{1 + \mu}, \qquad x = \frac{a + \lambda y}{1 + \lambda} \qquad \text{avec} \qquad \lambda > 0, \qquad \mu > 0.$$

D'où

$$x = \frac{a}{1 + \lambda} + \frac{\lambda}{(1 + \lambda)(1 + \mu)} b + \frac{\lambda \mu}{(1 + \lambda)(1 + \mu)} c$$

ou

$$x = ra + sb + tc,$$

où r, s, t sont trois nombres réels *tous positifs* et tels que

$$r + s + t = 1.$$

Définition XV. — « *x est un point intérieur à l'angle bac* » signifie : *x est un point distinct de a et il y a un point y du rayon ax qui est placé entre b et c.*

Alors

$$x = ra + sb + tc \qquad \text{avec} \qquad r + s + t = 1;$$

mais on suppose seulement que s et t sont de même signe.

Définition XVI. — « *Plan abc* » signifie : *figure à laquelle appartient tout point x tel qu'il n'existe aucun point y distinct de x vérifiant simultanément les conditions*

$$(a, y) = (a, x), \qquad (b, y) = (b, x), \qquad (c, y) = (c, x),$$

les points a, b, c étant supposés non en ligne droite.

Soit P la figure formée par tous les points x tels que

$$x = ra + sb + tc,$$

où r, s, t sont trois variables réelles quelconques assujetties seulement à la relation $r + s + t = 1$. Je dis que le plan abc existe et coïncide avec P.

Le plan abc existe, car, si y est distinct de a, on a

$$(a, y) > 0 \qquad \text{et} \qquad (a, a) = 0,$$

donc

$$(a, y) \neq (a, a);$$

par suite, le plan abc comprend bien au moins le point a et de même les points b et c.

Soit maintenant x un point de P; je dis qu'il est dans abc.

En effet, on voit facilement qu'on a, quel que soit y,

$$r[(a, y)^2 - (a, x)^2] + s[(b, y)^2 - (b, x)^2] + t[(c, y)^2 - (c, x)^2] = (x, y)^2.$$

Si y est distinct de x, on n'a donc pas simultanément

$$(a, y) = (a, x), \qquad (b, y) = (b, x), \qquad (c, y) = (c, x);$$

x est dans le plan abc.

Réciproquement, je dis que, si x est dans le plan abc, il est dans P.

Il suffit de prouver que, si x n'est pas dans P, on pourrait trouver un point y distinct de x tel qu'on ait simultanément

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (a, y)^2 - (a, x)^2 = 0, \\ (b, y)^2 - (b, x)^2 = 0, \\ (c, y)^2 - (c, x)^2 = 0. \end{array} \right.$$

Pour cela, prenons

$$y = 2(ra + sb + tc) - x \qquad \text{avec} \qquad r + s + t = 1,$$

les nombres r, s étant à déterminer par (6). Le point y est sûrement distinct de x, sans quoi celui-ci serait dans P. D'autre part, les premiers membres des équations (6) peuvent s'écrire, en posant $ra + sb + tc = u$,

$$\sum (u_i - a_i)(u_i - x_i) = 0,$$

$$\sum (u_i - b_i)(u_i - x_i) = 0,$$

$$\sum (u_i - c_i)(u_i - x_i) = 0;$$

en multipliant par r, s, t et ajoutant, on aura une identité. Si donc on prend par exemple $t \neq 0$, il suffit de satisfaire aux deux premières. Celles-ci peuvent s'écrire, en développant,

$$(r-1)(r\beta^2 + sI - H) + s(rI + s\alpha^2 - R) = 0,$$
$$(s-1)(rI + s\alpha^2 - R) + r(r\beta^2 + sI - H) = 0,$$

et posant

$$\alpha^2 = (b, c)^2, \qquad \beta^2 = (a, c)^2, \qquad I = \sum (c_i - a_i)(c_i - b_i),$$

$$H = \sum (c_i - x_i)(c_i - a_i), \qquad R = \sum (c_i - x_i)(c_i - b_i).$$

On satisfera donc à ces deux équations en prenant

$$r\beta^2 + sI - H = 0, \qquad rI + s\alpha^2 - R = 0.$$

Il y a une solution unique en r et s, car le déterminant des coefficients,

$$\alpha^2\beta^2 - I^2 = \sum (b_i - c_i)^2 \sum (a_i - c_i)^2 - \left[\sum (c_i - a_i)(c_i - b_i)\right]^2,$$

est positif, d'après la démonstration donnée à propos

de la définition I, puisque les trois points a, b, c ne sont pas alignés.

Le théorème est ainsi démontré.

(*A suivre.*)

[K12bα]

SUR LE PROBLÈME D'APOLLONIUS;

PAR M. MAURICE FOUCHÉ,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

I. La méthode si remarquable que M. Bricard vient de faire connaître pour construire les cercles tangents à trois cercles donnés peut se déduire assez facilement de celle qui avait été indiquée autrefois par Poncelet et que j'ai publiée dans ce Recueil en 1892, la croyant alors nouvelle.

Soient (*fig.* 1) :

O, O′, O″ les trois cercles donnés;
A l'un des centres de similitude de O et O′;
B l'un des centres de similitude de O et O″;
AC, AE les tangentes communes des cercles O et O′ passant par A;
BD, BF les tangentes communes de O et O″ passant par B; C, D, E, F étant les points de contact de ces tangentes avec O.

La méthode de M. Bricard consiste à joindre CF et DE qui se coupent en P, ou CD et EF qui se coupent en Q. Ensuite, on mène au cercle O une tangente parallèle à l'une des tangentes communes aux cercles O′ et O″ qui passent par celui des deux centres de similitude de O′ et O″ qui se trouve sur l'axe de similitude AB,

en ayant soin de choisir, parmi les deux tangentes parallèles au cercle O, celle qui est homologue de la tangente commune qu'on a choisie aux cercles O′ et O″. Si G est le point de contact de cette tangente avec O, on joint GP et GQ qui rencontrent le cercle O

Fig. 1.

en deux autres points M et N. M et N sont les points de contact avec O des deux cercles tangents aux trois cercles donnés qui correspondent à l'axe de similitude AB.

Si l'on avait choisi la seconde tangente commune à O′ et O″, on aurait retrouvé les deux mêmes points M et N.

Une remarque très simple permet d'abord de modifier cette construction en diminuant d'une unité le nombre des lignes droites à tracer. Désignons par R, S, T, U les sommets du quadrilatère formé par les tangentes communes issues de A et de B. Il résulte d'abord du théorème de Pascal relatif à l'hexagone inscrit que les quatre points A, B, P, Q sont en ligne droite, c'est-à-dire que les points P et Q sont sur l'axe

de similitude. De plus, les droites CF et DE doivent se couper sur la polaire du point Q par rapport au cercle O, laquelle n'est autre que la diagonale SU du quadrilatère circonscrit au cercle O. De même, la droite RT passe au point Q. Ainsi, les points P et Q, qui jouent un rôle si important dans la construction, sont les intersections de l'axe de similitude AB avec les diagonales du quadrilatère des tangentes communes issues de A et B.

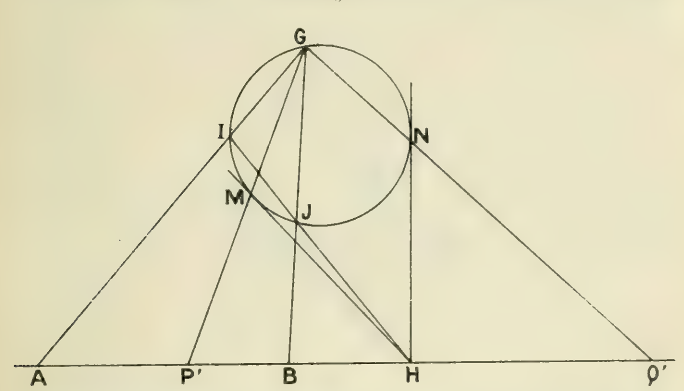
Ajoutons que les points P et Q sont conjugués par rapport au cercle O, puisque SU est la polaire de Q et qu'ils sont aussi conjugués par rapport à AB, à cause de la propriété bien connue du quadrilatère complet. De là résulte une nouvelle définition de ces points : ce sont les points conjugués communs dans deux involutions définies sur la droite AB, l'une par les points doubles A et B, l'autre par le cercle O. Ces deux involutions sont bien distinctes, puisque les points A et B, n'étant pas sur le cercle O, ne sont pas les points doubles de l'involution des points conjugués par rapport au cercle.

Considérons maintenant la construction de Poncelet. Il faut mener un cercle isogonal aux trois cercles donnés, c'est-à-dire un cercle coupant les trois cercles donnés en trois points antihomologues, prendre l'intersection H avec AB de la corde commune à ce cercle isogonal et au cercle O, et mener de H deux tangentes au cercle O. Les points de contact sont les points cherchés M et N.

Or, G est l'homologue des points de contact G′ et G″ de la tangente commune aux cercles O′ et O″. Si donc on joint GA et GB, on obtiendra sur le cercle O deux nouveaux points d'intersection I et J qui seront respectivement antihomologues de G′ et G″, lesquels sont

eux-mêmes antihomologues sur les cercles O′ et O″. Donc celui des cercles isogonaux qui passe par G′, G″, I passera aussi par J, et IJ (*fig.* 2) sera la corde com-

Fig. 2.



mune. Si H est l'intersection de IJ avec AB, c'est de H qu'il faudra mener les tangentes au cercle O. Soient HM et HN ces deux tangentes. Pour justifier la construction de M. Bricard en partant de celle de Poncelet, il suffira de démontrer que la droite GM passe au point P et la droite GN au point Q, les points P et Q étant définis comme précédemment.

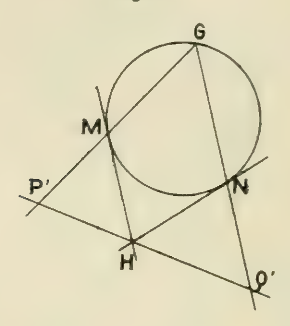
Soient P′ l'intersection de AB et GM, Q′ l'intersection de GN et AB. Il suffira de prouver que P′ et Q′ sont conjugués par rapport à AB et conjugués aussi par rapport au cercle O.

En premier lieu, les quatre points I, J, M, N, situés sur des droites issues de H, forment sur le cercle une involution dont M et N sont les points doubles. Donc le faisceau des quatre droites issues de G est harmonique, et il en est de même de la division que ce faisceau détermine sur AB.

La seconde propriété est une conséquence du théorème suivant :

Par un point G *d'une conique, menons deux sécantes* GM, GN, *puis les tangentes en* M *et* N (*fig.* 3),

Fig. 3.



lesquelles se coupent en H. *Si une droite pivote autour du point* H, *elle déterminera sur* GM *et* GN *des points* P′ *et* Q′ *qui seront conjugués par rapport à la conique.*

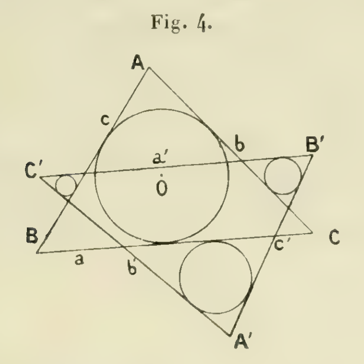
En effet, les points P′ et Q′ forment deux divisions homographiques dont on connaît trois couples, savoir : 1° G, point commun; 2° M et l'intersection de HM avec GN; 3° N et l'intersection de HN avec GM. D'autre part, les points conjugués par rapport à la conique et situés respectivement sur les deux droites GM et GN forment aussi deux divisions homographiques qui admettent les mêmes couples. Donc la correspondance homographique est identique dans les deux cas, et les points P′ et Q′ sont bien conjugués par rapport à la conique. C. Q. F. D.

II. Dans le même article, M. Bricard a signalé deux

théorèmes relatifs à quatre cercles tangents à un même cercle. Ces deux théorèmes peuvent se démontrer par l'application de la construction précédente.

Soient (*fig.* 4) deux triangles ABC, A'B'C' ayant

Fig. 4.



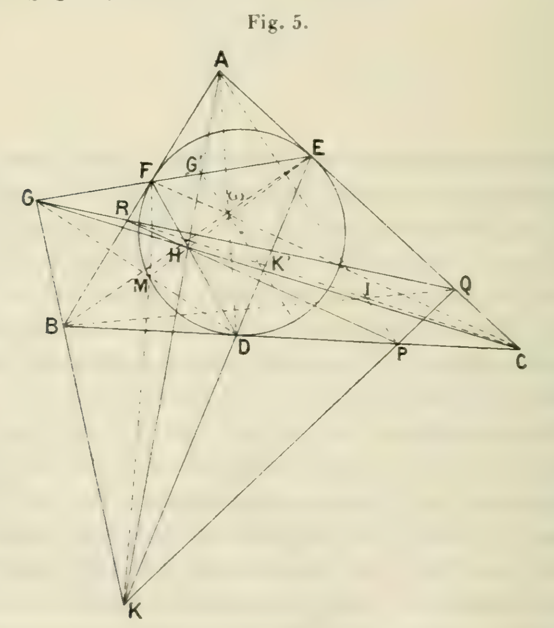
leurs côtés respectivement parallèles. Considérons sur ces côtés les semi-droites BC, CA, AB et les semi-droites de même sens C'B', A'C', B'A', semi-droites que nous désignerons respectivement par a, b, c, a', b', c'. Le premier théorème consiste en ce qu'il existe un cycle tangent aux quatre cycles respectivement tangents aux systèmes de semi-droites : abc, $ab'c'$, $a'bc'$, $a'b'c$.

Proposons-nous de chercher le cycle tangent aux trois cycles abc, $a'bc'$, $a'b'c$, dont le premier sera désigné par O. Il faut d'abord chercher l'axe de similitude. Or, la droite AC est une tangente commune aux cycles O et $a'bc'$, et les points B et B' d'où partent deux couples de tangentes respectivement parallèles sont homologues dans l'homothétie des deux cycles. Donc, le centre de similitude de ces deux cycles est le point d'intersection Q de AC et de BB'. Soient de même P et R les intersections respectives de BC et AC

avec AA′ et CC′. L'axe de similitude cherché est la droite QR, et les droites PR et PQ sont les axes de similitude des deux autres systèmes de trois cycles comprenant le cycle O.

On peut remarquer que les trois droites AP, BQ, CR passent par le centre d'homothétie des triangles ABC, A′B′C′, ce qui nous dispensera à l'avenir de tracer le triangle A′B′C′. Il suffira, pour figurer les points P, Q, R, de joindre A, B et C à un point quelconque I du plan et de prendre les intersections des trois droites ainsi obtenues avec les côtés du triangle ABC (*fig.* 5).

Fig. 5.



Pour continuer la construction, il faut mener de Q et de R des tangentes au cercle O. Nous prendrons les côtés mêmes du triangle qui touchent le cercle en E

et F; puis nous joindrons EF qui rencontre QR en G. Enfin, il faut joindre le point G au point de contact de la semi-droite tangente à O et parallèle à l'une des tangentes communes aux deux autres cycles. Or, B'C' est l'une de ces tangentes communes et BC, qui touche le cycle O en D, est bien la semi-droite tangente à O et parallèle à B'C'. Donc, nous joindrons GD, qui coupe le cycle O en un second point M; M sera le point de contact d'un cycle tangent aux trois cycles considérés. Le théorème sera donc démontré si l'on fait voir qu'on retrouve le même point M quand on répète la construction précédente en partant d'une autre combinaison du cycle O avec deux des trois autres cycles.

Si G, H, K sont les points d'intersection respectifs de EF et RQ, FD et PR, DE et PQ, il suffira de montrer que les droites GD, HE, FK passent par un même point situé sur le cercle O. Je dis que cela revient à prouver que le triangle GHK est autopolaire par rapport à ce cercle. Supposons, en effet, que G et K soient deux points conjugués par rapport à ce cercle, et soit M_1 l'intersection de GD avec FK. La polaire de G, par rapport à l'angle EKF, doit couper EF au point conjugué de G, et, comme elle passe au point K, elle se confond avec la polaire de G par rapport au cercle. Donc, elle coupe GD en un point qui est conjugué de G à la fois par rapport à M_1D et à MD, ce qui exige que les points M et M_1 se confondent, c'est-à-dire que M_1 soit sur le cercle O. On prouverait de même que EH passe aussi au même point M.

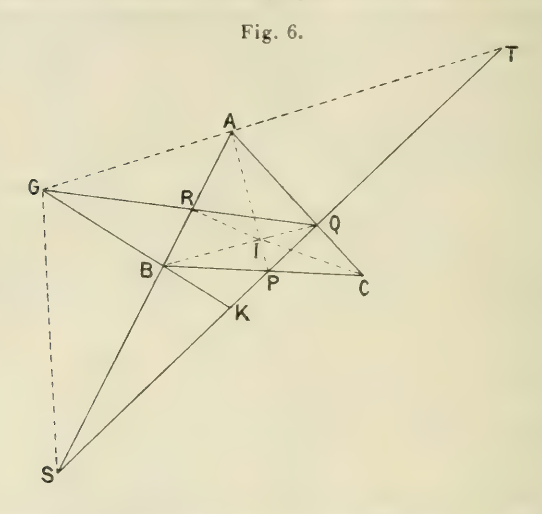
On peut ajouter que la polaire de G devant passer par H et par A, les trois côtés du triangle GHK passent respectivement par les trois sommets du triangle ABC.

Il reste à démontrer que le triangle GHK est auto-

polaire, ou, plus simplement, que G et K sont conjugués par rapport au cercle O.

A cet effet, considérons (*fig.* 6) un triangle ABC et

Fig. 6.

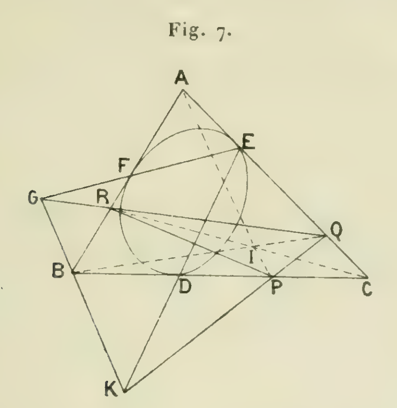


un point fixe G autour duquel nous ferons pivoter une droite qui rencontre AB en R et AC en Q. Joignons RC et QB qui se coupent en I, puis AI qui détermine sur BC un point P. Je dis que la droite PQ coupe BG en un point qui reste fixe quand RQ pivote autour de G. Soit, en effet, K ce point d'intersection, et soient aussi S et T les intersections respectives de PQ avec AB et GA. A cause du quadrilatère QIPC, la division ABRS est harmonique ; il en est donc de même du faisceau G.ABRS, de la division TKQS et enfin du faisceau A.TKQS ou A.GKCB. Donc AK est la polaire de G par rapport à l'angle BAC et le point K est fixe à l'intersection de GB avec cette polaire.

Cela posé, considérons (*fig.* 7) une conique DEF, inscrite dans le triangle ABC ; D, E, F étant les points de contact. Prenons le point fixe G sur EF. Le point D

peut être considéré comme une des positions du point P, puisque, d'après le théorème de Brianchon, les trois droites AD, BE, CF sont concourantes. Donc le point fixe K est à l'intersection de GB et ED. Comme le point K est sur la polaire de G par rapport

Fig. 7.



à l'angle A, laquelle est aussi la polaire de G par rapport à la conique, les points G et K sont conjugués par rapport à la conique ([1]). Si maintenant nous construisons le triangle PQR comme précédemment, en faisant passer RQ par G, la droite PQ ira passer au point K. Inversement, si l'on construit d'abord le triangle PQR en se donnant le point I, on prendra pour G l'intersection de EF et de RQ, et la droite PQ coupera la droite BG au point K conjugué de G par rapport à la conique. Or, c'est précisément la construction qui a été faite. Donc, le triangle GHK est bien autopolaire. C. Q. F. D.

([1]) Cela résulte aussi du théorème démontré dans la première Partie de ce travail, puisque la droite GK passe par le point B d'où partent les tangentes BD et BF.

Remarque. — Le point M ne dépend que du triangle ABC et du point I.

De plus, si l'on fait pivoter la droite RQ autour du point G, le lieu du point I, intersection des droites homographiques BQ et CR, est une conique qui passe, comme on le reconnaît facilement, par les trois points A, B, C et le point de concours ω des trois droites AD, BE, CF. Si le point G reste fixe, il en est de même des points H et K et, par conséquent, du point M. On peut donc ajouter au premier théorème de M. Bricard la remarque suivante :

Le cycle tangent aux quatre cycles considérés touche le cycle inscrit au triangle ABC *en un point qui reste fixe quand on remplace le triangle* A′B′C′ *par un autre en conservant le centre d'homothétie des deux triangles ou même en déplaçant ce centre d'homothétie sur une conique circonscrite au triangle* ABC *et passant par le point de concours des trois droites qui joignent les sommets du triangle aux points de contact du cycle inscrit.*

On peut remarquer aussi que les côtés du triangle GHK sont tangents à cette conique.

Si l'on fait une perspective pour remplacer le cercle O par une conique, on obtient le théorème suivant :

Considérons une conique inscrite dans un triangle ABC *et le faisceau des coniques circonscrites à ce triangle et passant par le point de concours des droites qui joignent les sommets du triangle aux points de contact* D, E, F *de la conique inscrite. Le triangle formé par les tangentes en* A, B, C *à l'une quelconque des coniques du faisceau est homologique au triangle* DEF, *et le lieu du centre d'homologie est la conique inscrite considérée.*

Enfin, je signalerai les propriétés suivantes :

Nous savons déjà que les deux triangles GHK et DEF sont homologiques, avec M pour centre d'homologie. Je dis que l'axe d'homologie de ces deux triangles passe au point ω. En effet, soit (*fig.* 5) $G'H'K'$ cet axe. G' est conjugué de G par rapport à EF et K' de K par rapport à ED. Donc, les trois droites GK, $G'K'$, FD passent par un même point et forment un faisceau harmonique avec la droite qui joint ce point au point E. Alors la division déterminée par ce faisceau sur la droite BE doit être harmonique. Or précisément, à cause du quadrilatère $BF\omega D$; le point ω est conjugué du point B par rapport au segment compris entre E et FD. Donc, la droite $G'H'$ passe bien au point ω.

Le triangle DEF est autopolaire par rapport à la conique des quatre points. En effet, la droite EF qui passe par G pôle de BC, puisque GB et GC sont deux tangentes, et qui coupe $A\omega$ au point conjugué de D par rapport à $A\omega$ à cause du quadrilatère $AF\omega E$, est bien la polaire du point D.

La tangente en ω à la conique des quatre points est l'axe d'homologie $G'H'K'$, car le pôle de ω, devant être sur AH tangente en A et sur EF polaire de D, est en G'.

Enfin, le point M est le pôle de l'axe d'homologie des deux triangles ABC, DEF. En effet, le pôle de GD se trouve à l'intersection D' de BC, polaire de G, et EF, polaire de D. De même, les deux autres droites HE et KF, qui passent aussi en M, ont leurs pôles aux points E' et F', où se coupent CA et DF, puis AB et ED. La polaire du point M est donc bien la droite $D'E'F'$. *Ainsi la conique* DEF *est le lieu des pôles de la droite fixe* $D'E'F'$ *par rapport aux coniques du faisceau.*

(*A suivre.*)

[O8a]

CONSTRUCTION DES CENTRES DE COURBURE DES LIGNES DÉCRITES PENDANT LE DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE PLANE SUR SON PLAN;

Par M. FARID BOULAD,
Ingénieur au Service des ponts des chemins de fer de l'État égyptien.

Nous nous proposons de donner ici deux nouvelles constructions géométriques, très simples, des centres de courbure des courbes décrites pendant le mouvement plan d'une figure plane invariable de grandeur dont deux points décrivent deux courbes connues dans le plan de cette figure.

Dans le cas particulier où les deux courbes connues sont des droites, nous avons été conduit à une construction géométrique très simple, comme celle donnée par M. Mannheim, pour le centre de courbure des coniques.

Nous justifierons ces constructions par une démonstration purement géométrique indépendante de la considération de ce mouvement comme étant un mouvement épicycloïdal.

Nos constructions consistent dans les deux solutions ci-après 1° et 2° de l'important problème de Cinématique (1).

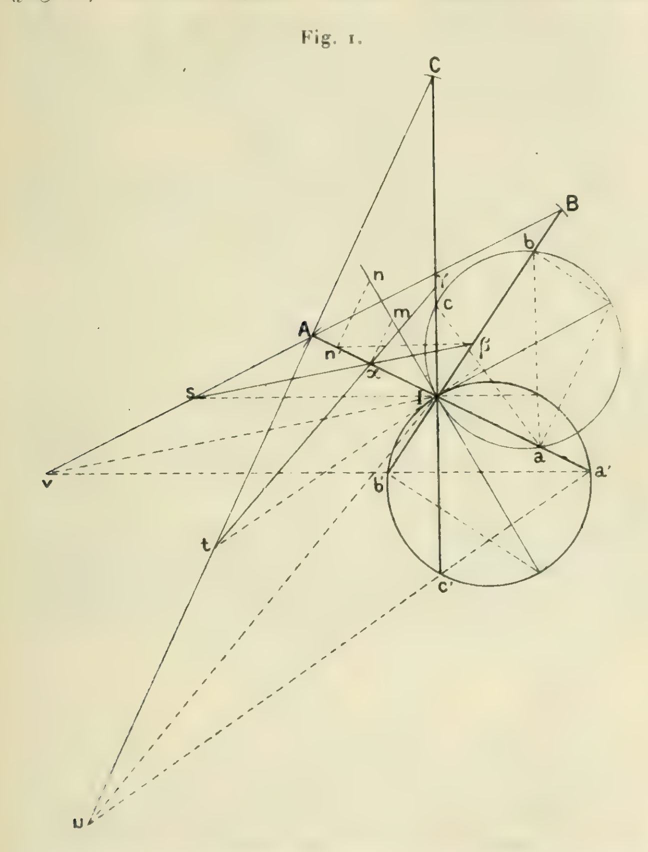
Une figure plane invariable de forme se déplace

---

(1) Qu'il nous soit permis de remercier ici le Dr Grindly, directeur de l'École polytechnique du Caire, pour avoir bien voulu nous renseigner sur les recherches déjà faites sur cette question.

sur un plan de façon que deux points A *et* B (*fig.* 1) *de cette figure restent respectivement sur*

Fig. 1.



deux courbes (A) *et* (B) : *on demande de construire le centre de courbure* γ *de la courbe* (C) *décrite par un point quelconque* C *de cette figure, connaissant, pour une position quelconque* AB, *les centres de courbure* α *et* β *respectivement relatifs aux courbes* (A) *et* (B).

1° *Si a et b sont les points de rencontre respectifs*

des deux normales AI *et* BI *en* A *et* B *avec une perpendiculaire quelconque à la droite* I*s qui joint le centre instantané de rotation* I *au point de concours s des droites* AB *et* $\alpha\beta$, *le cercle circonscrit aux trois points a*, I, *b coupe orthogonalement, en* I, *le lieu de ce centre. Pour avoir le centre de courbure* γ *répondant à un point* C, *il suffit, si la normale* IC *rencontre en c le cercle* (*a*I*b*), *de joindre le centre de courbure* α *au point de concours t de la droite* AC *avec la perpendiculaire* I*t à la corde ac, par une droite t*α *qui coupe, en* γ, *la normale* IC.

2° *Si, par le point de rencontre v de la droite* AB *avec la parallèle* I*v menée par* I *à la droite* $\alpha\beta$, *on mène à la droite* I*s une parallèle qui coupe respectivement en* a' *et* b' *les deux normales* AI *et* BI, *le cercle circonscrit aux trois points* a'Ib' *est le cercle des inflexions de M. Bresse. Si l'on appelle* c' *le point de rencontre de ce cercle avec la normale* IC *et u le point de concours de la droite* AC *et de la corde* $a'c'$, *la parallèle menée par* α *à la droite* I*u coupe* AC *au centre de courbure* γ.

DÉMONSTRATION.

1° Appelons θ et ω les angles que font respectivement les normales AI et BI avec un axe quelconque du plan de la figure. Désignons par $d(\mathrm{A})$, $d(\mathrm{B})$ et $d(\mathrm{I})$ les différentielles des arcs des courbes (A), (B) et (I) aux points correspondants A, B, I. Soient *m* et *n* les points de rencontre de la normale I*n* au lieu (I) avec les perpendiculaires élevées en α et β aux normales AI et BI. D'après la formule (III) indiquée dans le *Cours de Géométrie infinitésimale* de notre ancien profes-

seur M. d'Ocagne, p. 259, on a

$$d(\mathrm{A}) = \mathrm{A}\alpha\, d\theta, \qquad d(\mathrm{B}) = \mathrm{B}\beta\, d\omega$$

et

$$d(\mathrm{I}) = \mathrm{I}m\, d\theta = \mathrm{I}n\, d\omega,$$

d'où

$$\frac{d(\mathrm{A})}{d(\mathrm{B})} = \frac{\mathrm{A}\alpha.\mathrm{I}n}{\mathrm{B}\beta.\mathrm{I}m};$$

mais, comme on a

$$\frac{d(\mathrm{A})}{d(\mathrm{B})} = \frac{\mathrm{IA}}{\mathrm{IB}},$$

on en déduit

$$\frac{\mathrm{A}\alpha.\mathrm{I}n.\mathrm{IB}}{\mathrm{B}\beta.\mathrm{I}m.\mathrm{IA}} = 1.$$

Or, le triangle $\alpha\mathrm{I}\beta$, coupé par la transversale $s\mathrm{AB}$, donne

$$\frac{\mathrm{B}\beta.\mathrm{IA}.s\alpha}{\mathrm{A}\alpha.\mathrm{IB}.s\beta} = 1.$$

Multiplions membre à membre ces deux dernières relations, et appelons n' le pied de la perpendiculaire abaissée du point n sur IA; il vient

$$\frac{s\alpha}{s\beta} = \frac{\mathrm{I}m}{\mathrm{I}n} = \frac{\mathrm{I}\alpha}{\mathrm{I}n'},$$

ce qui montre que la droite $\beta n'$ est parallèle à $\mathrm{I}s$, et, comme $\mathrm{I}n$ est la normale au lieu (I), il en résulte la proposition suivante :

2° *Un cercle quelconque, tangent en* I *au lieu de ce point, détermine, sur deux normales quelconques* IA *et* IC *aux trajectoires de deux points quelconques* A *et* C *de la figure considérée, deux points a' et c' tels que la corde $a'c'$ est parallèle à la droite* $\mathrm{I}t$.

Or, en vertu d'un théorème bien connu de Géomé-

trie élémentaire, si a et c sont les points de rencontre respectifs de deux droites quelconques IA et IC avec un cercle quelconque (aIc) qui coupe orthogonalement en un point I un autre cercle $(a'Ib')$, les deux cordes ac et $a'c'$ sont rectangulaires.

Par suite, la droite It est *perpendiculaire* à la corde ac.

3° Les droites vI et va' étant, par hypothèse, respectivement parallèles aux droites $s\beta$ et sI, on a

$$(1) \qquad \frac{AI}{A\alpha} = \frac{Av}{As} = \frac{Aa'}{AI}.$$

Pour démontrer que, dans ce cas, le cercle $(a'Ib)$ est le cercle des inflexions, il suffit de montrer que le centre de courbure répondant à un point quelconque c' de ce cercle est rejeté à l'infini.

Or, si nous appelons r le point de rencontre de la droite Ac' avec la perpendiculaire It à la corde ac, le point de concours des droites $r\alpha$ et Ic' est, d'après la construction (1°), le centre de courbure correspondant au point c'. Je dis que ces deux droites $r\alpha$ et Ic' sont parallèles.

En effet, la droite Irt est, d'après la proposition (3°), parallèle à la corde ac', et l'on a, en se rapportant aux rapports (1),

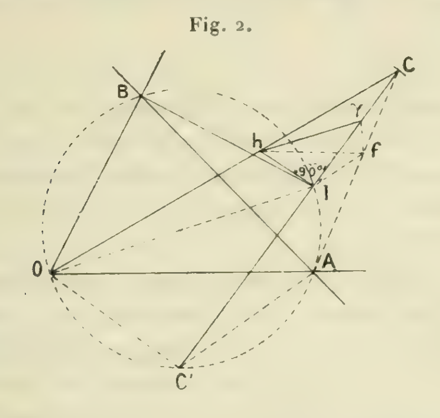
$$\frac{Ar}{Ac'} = \frac{AI}{Aa'} = \frac{A\alpha}{AI}.$$

Remarque. — Les constructions précédentes s'appliquent aussi à la recherche du centre de courbure de l'enveloppe d'une droite du plan d'une figure invariable, en déterminant le centre de courbure de la courbe décrite par le point qui est à l'infini sur la perpendiculaire abaissée de I sur la droite considérée.

FIGURE DONT DEUX POINTS DÉCRIVENT DES DROITES.

En appliquant la construction (3°), dans le cas particulier où les deux points A et B (*fig.* 2) restent sur

Fig. 2.



deux droites OA et OB, nous avons été conduit, pour ce cas, à la construction suivante très simple du centre de courbure γ de la trajectoire d'un point quelconque C :

Par le point h où la droite OC *coupe la perpendiculaire* I*h à* IC, *mener à la droite* OI *la parallèle h*λ *qui coupe* IC *au centre cherché* γ.

Cette construction se comprend aisément, par simple inspection de la figure et en remarquant que, d'après la proposition (3°), le cercle circonscrit au quadrilatère IBOA est tangent au lieu du centre instantané de rotation I, et que les deux figures c'AIO et I$f\gamma h$ sont homothétiques. Elles ont C comme centre d'homothétie.

[N°3]

UN THÉORÈME SUR LES CONGRUENCES DE COURBES;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

1. Considérons une congruence N de courbes d'ordre k telle que par un point quelconque passent p courbes de cette congruence (ordre), et qu'une droite quelconque soit bisécante de q courbes du système (classe).

Les courbes de la congruence N marquent sur un plan π des groupes d'une homographie planaire H d'ordre $p(k-1)+1$ et de classe q. Cette homographie jouit de la propriété suivante : un point quelconque appartient à p groupes de l'homographie.

2. Les courbes de la congruence N qui s'appuient en un point sur une droite quelconque d engendrent une surface. Désignons par S_m cette surface, m étant l'ordre de la surface. En d'autres termes, soit m le nombre de courbes de la congruence N qui s'appuient sur deux droites quelconques.

La droite d est évidemment une droite multiple d'ordre p de la surface S_m.

Si l'on suppose que le plan π du n° 1 passe par la droite d, on voit que les points du plan π qui, avec les points de la droite d, forment des groupes de l'homographie H, engendrent une courbe c d'ordre $m-p$.

3. La courbe c rencontre la droite d en $m-p$ points.

Parmi ces points, il y en a $2q$ qui appartiennent aux groupes de l'homographie H qui ont deux points sur la droite d. Ils sont marqués par les courbes de la congruence N qui admettent d comme bisécante.

Les points restants se correspondent à eux-mêmes; ils ne peuvent donc provenir que des courbes de la congruence N tangentes au plan π. On sait que le lieu des points de contact des courbes d'une congruence avec un plan est une courbe. Si l'on désigne par n l'ordre de cette courbe, on a le théorème :

Si m est l'ordre de la surface engendrée par les courbes d'une congruence d'ordre p et de classe q s'appuyant sur une droite, et n l'ordre de la courbe lieu des points de contact des courbes de la même congruence avec un plan, on a

$$m - n = p + 2q.$$

Dans le cas où $p = 1$, l'homographie H devient une involution d'ordre k et le théorème est connu ([1]).

CORRESPONDANCE.

M. **Têtu**. — Un théorème bien connu de Géométrie est le suivant :

La projection de la normale en un point d'une ellipse, sur les rayons vecteurs de ce point, est constante.

Ce théorème se généralise ainsi :

Soit α un point d'une conique A : *de ce point on mène*

([1]) Ferretti, *Sulla generazione delle involuzioni di classe zero ed uno* (*Rendiconti di Palermo*, t. XVII, 1903, p. 311-326).

une tangente αT *à une conique* B *homofocale à* A; *la projection de la normale en* α *à* A *sur* αT *est constante.*

Cette généralisation est une conséquence immédiate de la propriété signalée dans la question 2059.

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Lyon.

Épreuve pratique. — *Soient*

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots a_r)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

les équations d'un groupe G *de transformations.*

1° *Établir les équations différentielles auxquelles satisfont les* x', *considérées comme fonctions des* a.

N. B. — *On n'examinera pas la réciproque.*

2° *Considérant comme connue la théorie des groupes à un paramètre, appliquer les équations trouvées à la construction des sous-groupes à un paramètre contenus dans* G.

3° *Calculer l'invariant différentiel du troisième ordre du groupe*

$$x' = x, \qquad y' = \frac{ay + b}{cy + 1},$$

y *étant considéré comme fonction de* x.

N. B. — *Employer successivement les équations finies et les transformations infinitésimales du groupe.*

Épreuve pratique. — *Soient*

l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 = 1$;
A *le sommet* $y = 0$, $x = 1$;
O *le centre de l'hyperbole;*
M *un point de l'hyperbole et* MP *son ordonnée;*
OMA *le secteur mixtiligne, où* AM *est l'arc de l'hyperbole.*

Déterminer M *par la condition suivante :*

$$\text{aire secteur OMA} = \frac{3}{4} \times \text{aire triangle OMP}.$$

N. B. — *On posera*

$$x = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{u}{2}} + e^{-\frac{u}{2}}\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{u}{2}} - e^{-\frac{u}{2}}\right)$$

et l'on calculera le u *du point* M.

(Novembre 1906.)

Nancy.

Épreuve théorique. — I. *Développement d'une fonction analytique uniforme d'une variable complexe au voisinage d'un point singulier isolé.*

II. *On considère l'équation*

$$x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 4 = 0.$$

1° *Démontrer qu'elle est irréductible dans le domaine de rationalité formé par les nombres entiers et fractionnaires.*

2° *Montrer que, si elle admet la racine* x_1, *elle admet en même temps la racine* $x_2 = \dfrac{a x_1}{x_1 + b}$, *où* a *et* b *sont deux nombres entiers convenablement choisis. Déterminer ces entiers.*

3° *Quels renseignements la propriété précédente donne-t-elle sur le groupe de Galois de l'équation ?*

4° *A l'aide de cette propriété, résoudre l'équation.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale*

$$\int \frac{\sqrt{z^2 - z - 2}}{[\log(1+z)]^2}\, dz$$

étendue à la circonférence de rayon $\frac{1}{2}$ *ayant pour centre le point* $z = 0$ *et parcourue dans le sens direct. On prendra pour le radical et le logarithme les déterminations*

qui résultent, par continuité le long du rayon Ox, *des déterminations initiales* $i\sqrt{2}$ *et* o *au point* O.

(Octobre 1906.)

Épreuve théorique. — I. *Démontrer qu'une fonction* $f(x)$ *de la variable réelle* x *finie et continue dans un intervalle* (a, b) *est développable en une série de polynomes entiers en* x, *uniformément convergente dans l'intervalle* (a, b).

Généraliser cette propriété pour une fonction $f(x)$ *finie et continue pour les valeurs réelles de* x.

II. *Déterminer une fonction analytique* $f(z)$ *de la variable complexe* $z = x + iy$ *par la condition que sa partie réelle soit une fonction de* $\frac{x}{1 - x^2 + y^2}$ *et que de plus on ait* $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

Épreuve pratique. — *Calculer les périodes de l'intégrale*

$$\int_0^z \sqrt[3]{1 - z^3}\, dz.$$

(Juin 1907.)

Épreuve théorique. — *Équations de Monge-Ampère. Origine de la forme de ces équations. Intégrales intermédiaires. Intégration des équations. Application à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles des surfaces développables.*

II. *On donne l'équation aux dérivées partielles*

$$p - q^2 = x - y + z.$$

Trouver l'intégrale z *qui se réduit à* $2y$ *pour* $x = 0$.

(Octobre 1907.)

Épreuve théorique. — I. *On considère l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{1}$$

où F *désigne un polynome indécomposable; soit* $z = \varphi(x, y)$ *une intégrale quelconque. Démontrer que, si cette inté-*

grale ne satisfait pas à la fois aux deux équations

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial q} = 0,$$

elle sera donnée par le théorème de Cauchy. Définir les intégrales singulières de l'équation (1).

II. *On donne l'équation aux dérivées partielles*

$$(1 - z)\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial z}{\partial x_3} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

et l'on pose

$$x_2 + x_3 + \ldots + x_n = t.$$

Chercher les intégrales qui ne dépendent que de x_1 *et de* t. *Trouver, parmi elles, celle qui se réduit à* $\frac{2-t}{1-t}$ *pour* $x_1 = 0$ *et écrire son développement en série pour les valeurs suffisamment petites de* t.

III. *Intégrer l'équation aux dérivées partielles du second ordre*

$$z^2(rt - s^2) + z(1 + q^2)r - 2pqzs + z(1 + p^2)t + 1 + p^2 + q^2 = 0$$

et vérifier le résultat.

Épreuve pratique. — *Intégrer le système*

$$x_3 p_1 + x_3 x_4 p_3 - (1 + x_4^2)p_4 - x_4 x_5 p_5 = 0,$$
$$x_3 p_2 + x_3 x_5 p_3 - x_4 x_5 p_4 - (1 + x_5^2)p_5 = 0,$$

en employant la méthode de Mayer. (Juin 1907.)

Toulouse.

Épreuve théorique. — I. *On donne l'équation aux dérivées partielles*

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)(1 + p^2 + q^2) - (px + qy - z)^2 = 0$$

qui définit une famille de surfaces en coordonnées rectangulaires :

1° *Que devient cette équation si l'on fait un changement de coordonnées rectangulaires en conservant l'origine?*

2° *Former les équations différentielles des caractéristiques de cette équation. Montrer que les caractéristiques sont des courbes situées dans des plans passant par l'origine, et que ces plans coupent à angle droit les surfaces intégrales.*

Trouver la développée d'une caractéristique.

3° *Indiquer le mode de génération des surfaces intégrales qui résulte des résultats précédents et en conclure que la seconde famille de lignes de courbure est formée de courbes sphériques.*

II. *Soient une forme binaire biquadratique*

$$f(x, y) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 y + 6a_2 x^2 y^2 + 4a_3 x y^3 + a_4 y^4$$

et ses deux invariants

$$j_2 = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2, \qquad j_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Soit H(x, y) *le hessien de* $f(x, y)$.

Trouver la condition pour que les quatre points représentés par l'équation H $= 0$ *forment une division harmonique.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - x^3}}.$$

(Juillet 1907.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Soit la forme cubique*

$$f(x, y) = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 x y^2 + a_3 y^3;$$

on demande de ramener $f(x, y)$ *à une somme de deux cubes, en employant la théorie des invariants, et de faire par cette méthode la discussion de l'équation* $f(x, y) = 0$.

(*On ne demande pas de donner l'expression explicite des racines.*)

II. *Soient* x, y, z *les coordonnées rectangulaires d'un*

point m d'une courbe gauche exprimées en fonction de l'arc s; soient u, v, w trois fonctions de s qui représentent les cosinus directeurs d'une droite passant par m et normale à la courbe. Les formules

$$X = x + ut, \qquad Y = y + vt, \qquad Z = z + wt$$

représentent, en fonction des deux paramètres s et t, les coordonnées d'un point de la surface réglée la plus générale.

Former l'équation entre s et t qui définit les lignes asymptotiques de la surface. Utiliser cette équation pour trouver les surfaces réglées dont les rayons de courbure principaux sont en chaque point égaux et de signes contraires.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Les variables u et z étant liées par l'équation*

$$u^2 - 4uz - 1 = 0,$$

calculer l'intégrale $\int \frac{dz}{u}$ *lorsque z décrit dans le demi-plan supérieur la demi-circonférence qui va du point* $z = -1$ *au point* $z = +1$.

On suppose que, pour $z = -1$, *u prend une valeur positive.* (Novembre 1907.)

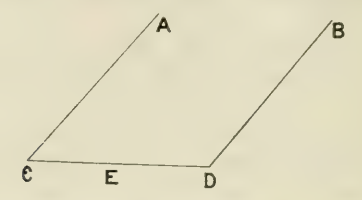
CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Marseille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *En deux points fixes* A *et* B, *situés à une distance a, sur une même horizontale, sont articulées les extrémités de deux tiges identiques* AC, BD, *homogènes, de longueur a et de poids* P. *Aux extrémités* C *et* D *de ces deux tiges sont articulées les extrémités d'un tube* CD *de longueur a et de poids* P *dans l'intérieur duquel peut glisser avec frottement un point pesant* E *de poids* P.

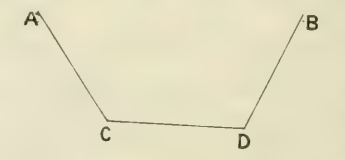
Tout le système est primitivement sans vitesse et les barres AC, BD *font avec la verticale un angle dont la tangente est* $\frac{3}{4}$.

On abandonne le système à lui-même et l'on demande



quel doit être le coefficient de frottement du point E *sur le tube* CD *pour que ce point ne se déplace pas dans le tube.*

Épreuve pratique. — *En deux points* A *et* B *fixés sur*



une même horizontale et distants de 2^{m}, *on attache un fil qui a* 3^{m} *de long et dont on néglige le poids.*

En deux points C *et* D, *qui partagent le fil en trois parties égales, on attache deux poids égaux chacun à* 1^{kg}. *Dans la figure d'équilibre, le fil a la forme d'un demi-hexagone régulier.*

On ajoute 1^{g} *au poids attaché en* D, *et l'on demande de calculer approximativement le déplacement du point* C.

(Novembre 1907.)

Montpellier.

Épreuve théorique. — I. *Théorème des forces vives relatif au mouvement des systèmes.*

II. *Deux points matériels pesants* M *et* M′, *de masses égales à l'unité, sont reliés par un fil flexible inexten-*

sible et sans masse, de longueur donnée. Le point M *est assujetti à glisser sans frottement sur une droite fixe inclinée sur l'horizon. Les deux points sont placés dans le plan vertical qui passe par cette droite fixe, et abandonnés sans vitesses initiales aux forces qui les sollicitent. Trouver leur mouvement; examiner si le fil reste tendu.*

Épreuve pratique. — *Un disque circulaire* A, *infiniment mince et homogène, mobile autour d'un point fixe* O *situé sur sa circonférence, est au repos. Un second disque circulaire* B, *infiniment mince et homogène, dont la masse est triple de celle du disque* A, *est animé dans le plan de* A *d'une translation uniforme parallèle au diamètre* OC *de* A. *Les deux disques sont parfaitement élastiques.*

Peut-on choisir le point où le disque B *choque le disque* A *de manière que, après le choc, la vitesse du centre de* B *soit perpendiculaire au diamètre* OC ?

(Novembre 1907.)

QUESTIONS.

2092. D'un point M variable d'une parabole de sommet O on abaisse les deux normales dont les pieds sont P et Q. Il existe une parabole tangente aux côtés du triangle MPQ et ayant son foyer en O. Le lieu du point de rencontre de la droite OM avec la directrice de cette parabole est une ellipse. (E.-N. Barisien.)

2093. Étant donné un triangle $\alpha\beta\gamma$, une transversale rencontre les côtés $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ en M, N, P, et l'on considère sur $\beta\gamma$ le segment AD le milieu M dont les extrémités A et D divisent harmoniquement $\beta\gamma$, sur $\gamma\alpha$ le segment analogue BE, sur $\alpha\beta$ le segment analogue CF; les six points A, D, B, E, C, F sont les sommets d'un quadrilatère complet. Si la droite MNP reste tangente à une conique S circonscrite au triangle $\alpha\beta\gamma$, chacun

des quatre côtés DEF, DBC, ECA, FAB du quadrilatère complet passe par un point fixe, et les quatre points obtenus sont les sommets d'un quadrangle dont $\alpha\beta\gamma$ est le triangle diagonal. Examiner le cas particulier où la conique S est le cercle circonscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$. (Sur ce cas particulier, *voir* KOEHLER, *Exercices*, p. 177.) (G. FONTENÉ.)

2094. Démontrer que les cercles bitangents à une hyperbole et ayant leurs centres sur l'axe non transverse sont vus d'un foyer sous un angle fixe. (M. TÊTU.)

ERRATA.

Page 44, ligne 14, *au lieu de*

$$\pi = x\sqrt{1-a^2}\int_0^y \frac{dy}{1+a\cos y},$$

lire

$$\pi - x = \sqrt{1-a^2}\int_0^y \frac{dy}{1+a\cos y}.$$

Page 96, ligne 1, remplacer ρ par P.

[R7fα]

SUR LA THÉORIE DES PERTURBATIONS DU PENDULE ;

PAR M. LE COMMANDANT P. CHARBONNIER.

---

1. Nous nous proposons, dans le problème classique du mouvement du pendule simple, de donner des formules générales permettant le calcul des perturbations produites par l'action de petites forces quelconques.

Une fois ces formules établies, la solution de chaque cas particulier devient très simple et presque immédiate.

La division de notre travail est la suivante :

I. Établissement des formules générales.
II. Le mouvement du pendule dans un milieu résistant.
III. Cas d'une résistance monome.
IV. La fonction perturbatrice dépend de l'arc.
V. Pendule avec fil élastique.
VI. Pendule de longueur variable.

I. — ÉTABLISSEMENT DES FORMULES GÉNÉRALES.

2. **Équation différentielle du mouvement.** — Soit O l'*axe instantané* de rotation autour duquel, à l'instant actuel, tourne le fil OM. Dans la plupart des cas, ce point O sera absolument fixe.

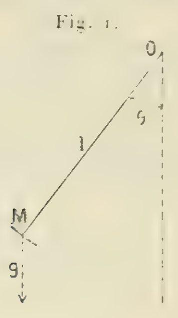
La longueur du fil est l, l'angle de OM avec la verticale est θ.

Appliquons le *théorème des moments des quan-*

tités de mouvement relativement à un axe passant en O et perpendiculaire au plan d'oscillation du pendule.

La vitesse du point M est $l\,\frac{d\theta}{dt}$, et son moment par rapport à l'axe passant en O est $l^2\,\frac{d\theta}{dt}$.

Fig. 1.



Les forces extérieures se réduisent à la *gravité* g, appliquée en M, dont le moment est $gl\sin\theta$.

Quand θ augmente, cette force tend à diminuer l'angle. On aura donc, d'après le théorème rappelé,

$$\frac{d}{dt}\left(l^2\,\frac{d\theta}{dt}\right) + gl\sin\theta = 0.$$

On en déduira l'équation différentielle

$$(1)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{l}\,\frac{dl}{dt}\,\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$

3. **Mouvement principal du pendule.** — Nous considérons comme *mouvement principal* celui d'un pendule dont le fil conserve une longueur constante l_0 et qui décrit seulement de très petites oscillations autour de la verticale.

Ainsi, le sinus pourra être réduit à l'arc, à un terme en θ^3 près, qu'on considérera ensuite comme un *terme secondaire*.

Dans ces conditions, l'équation (1) se réduira à

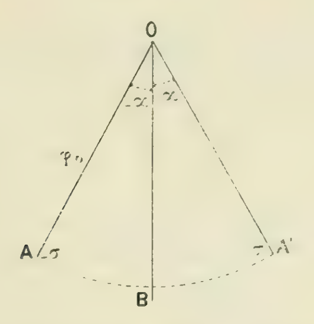
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2\theta = 0. \tag{2}$$

On a posé

$$k^2 = \frac{g}{l_0}.$$

Soit A la position initiale du pendule qui correspond à la valeur $-\alpha$ de l'angle. Le pendule oscille de

Fig. 2.



A en A', allant de $-\alpha$ à $+\alpha$. L'arc s varie de $-\sigma$ à $+\sigma$.

On aura, pour les équations finies du mouvement, en intégrant l'équation (2),

$$\theta = -\alpha \cos kt, \qquad \frac{d\theta}{dt} = k\alpha \sin kt. \tag{3}$$

Ce sont les formules ordinaires du pendule.

On en déduit, en faisant $\frac{d\theta}{dt} = 0$, pour la durée T d'une *oscillation simple* du pendule (de A en A'),

$$T = \frac{\pi}{k}.$$

La *vitesse* $\frac{d\theta}{dt} = \theta'$ est maximum au point le plus bas

et a pour expression, en faisant $kt = \frac{\pi}{2}$,

$$\theta'_m = k\alpha.$$

L'*arc de remontée* est égal à l'*arc de descente*.

4. **Forces perturbatrices.** — Supposons qu'une petite force accélératrice quelconque vienne à agir sur le pendule. Soit

$$\varepsilon\varphi\left(\theta, \frac{d\theta}{dt}, t\right)$$

la fonction qui, d'une façon générale, représente l'accélération de cette force estimée suivant la direction de l'arc élémentaire décrit par le pendule.

La fonction φ est quelconque, avec les trois variables, l'*angle* θ, la *vitesse* $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$, le *temps* t. Le nombre ε est un coefficient que nous supposons très petit, et dont le carré sera négligé ; l'hypothèse initiale est que le mouvement du pendule sera très peu modifié par l'introduction de cette force perturbatrice.

On écrira alors l'équation différentielle sous la forme

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - k^2\theta + \varepsilon\varphi\left(\theta, \frac{d\theta}{dt}, t\right) = 0.$$

5. **Développement de la fonction θ.** — L'angle θ, observé au temps t, est fonction du coefficient ε, et, à cause de la petitesse supposée de ce coefficient, on pourra développer θ en série convergente, suivant ses puissances ascendantes.

On posera, par suite,

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \ldots,$$

$\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots$ étant des fonctions de t, inconnues, qu'il s'agit de déterminer.

L'équation différentielle s'écrira alors

$$\frac{d^2\theta_0}{dt^2} + \varepsilon\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \varepsilon^2\frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \ldots + k^2\theta_0 + \varepsilon k^2\theta_1 + \varepsilon^2 k^2\theta_2 + \ldots$$
$$+ \varepsilon\varphi\left(\theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \ldots,\ \frac{d\theta_0}{dt} + \varepsilon\frac{d\theta_1}{dt} + \ldots,\ t\right) = 0.$$

Développons la fonction φ par la formule de Taylor ; il viendra

$$\varphi = \varphi\left(\theta_0, \frac{d\theta_0}{dt}, t\right) + \varepsilon\left[\theta_1\varphi'_{\theta_0} + \frac{d\theta_1}{dt}\varphi'_{\frac{d\theta_0}{dt}}\right] + \ldots.$$

Annulant successivement les multiplicateurs de ε^0, ε^1, ε^2, ..., il viendra le système des formules suivantes :

$$\frac{d^2\theta_0}{dt^2} + k^2\theta_0 = 0,$$
$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + k^2\theta_1 + \varphi\left(\theta_0, \frac{d\theta_0}{dt}, t\right) = 0,$$
$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} + k^2\theta_2 + \theta_1\varphi'_{\theta_0} + \frac{d\theta_1}{dt}\varphi'_{\frac{d\theta_0}{dt}} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Avec les conditions suivantes, à l'origine des temps : pour $t = 0$, on a

$$\theta_0 = -\alpha, \qquad \frac{d\theta_0}{dt} = 0,$$
$$\theta_1 = \theta_2 = \ldots = 0, \qquad \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{d\theta_2}{dt} = \ldots = 0.$$

6. **Fonction θ_0.** — Elle représente le terme principal de la série et elle est donnée par les formules (3)

$$\theta_0 = -\alpha\cos kt, \qquad \frac{d\theta_0}{dt} = k\alpha\sin kt.$$

La *durée* T d'une *oscillation simple* du mouvement

principal est

$$T = \frac{\pi}{k}.$$

La *vitesse* au point le plus bas est

$$\theta'_m = k\alpha.$$

7. **Fonction** θ_1. — L'équation différentielle qui définit la fonction θ_1

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} - k^2\theta_1 + \varphi\left(\theta_0, \frac{d\theta_0}{dt}, t\right) = 0$$

deviendra, en remplaçant dans φ les fonctions θ_0 et $\frac{d\theta_0}{dt}$ par leurs valeurs principales,

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} - k^2\theta_1 - \varphi\left(-\alpha\cos kt,\ k\alpha\sin kt,\ t\right) = 0.$$

On a ainsi réduit la fonction φ à une fonction de la seule variable t, et nous poserons, par suite,

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + k^2\theta_1 + \varphi(t) = 0.$$

C'est une équation linéaire du second ordre, avec second membre, que l'on sait intégrer.

A cet effet, on posera, comme on sait,

$$\theta_1 = M\cos kt + N\sin kt,$$

M et N étant deux fonctions arbitraires de t.

En différentiant, on écrira

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -kM\sin kt + kN\cos kt,$$

et posant, comme première condition imposée aux fonctions M et N, la relation

$$(p) \qquad \frac{dM}{dt}\cos kt + \frac{dN}{dt}\sin kt = 0.$$

D'autre part, formant $\dfrac{d^2\theta_1}{dt^2}$ et portant cette valeur ainsi que celle de θ_1 dans l'équation différentielle qui définit la fonction θ_1, il viendra une seconde équation de condition qui est la suivante :

$$(q) \qquad \frac{d\mathrm{M}}{dt}\sin kt + \frac{d\mathrm{N}}{dt}\cos kt + \frac{\varphi(t)}{k} = 0.$$

En combinant les deux équations (p) et (q), on aura

$$\frac{d\mathrm{N}}{dt} + \frac{1}{k}\varphi(t)\cos kt = 0,$$

$$\frac{d\mathrm{M}}{dt} - \frac{1}{k}\varphi(t)\sin kt = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{N} = -\frac{1}{k}\int_0^t \varphi(t)\cos kt\, dt,$$

$$\mathrm{M} = \frac{1}{k}\int_0^t \varphi(t)\sin kt\, dt.$$

On aura donc, pour θ_1, l'expression

$$k\theta_1 = \cos kt \int_0^t \varphi(t)\sin kt\, dt - \sin kt \int_0^t \varphi(t)\cos kt\, dt,$$

et l'on obtiendra aussi la dérivée sous la forme

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\sin kt \int_0^t \varphi(t)\sin kt\, dt - \cos kt \int_0^t \varphi(t)\cos kt\, dt.$$

θ_1 et $\dfrac{d\theta_1}{dt}$ sont ainsi des fonctions de deux intégrales que nous désignerons par les notations suivantes :

$$\mathbf{E}_s = \int_0^t \varphi(t)\sin kt\, dt,$$

$$\mathbf{E}_c = \int_0^t \varphi(t)\cos kt\, dt.$$

8. **Formules générales.** — Il viendra ainsi, pour l'intégrale générale de l'équation différentielle du pendule, en ne conservant que les termes du premier degré en ε :

$$(4) \qquad \theta = -\alpha \cos kt - \frac{\varepsilon}{k}\Big[\mathbf{E}_s \cos kt - \mathbf{E}_c \sin kt\Big],$$

$$(5) \qquad \theta' = \frac{d\theta}{dt} = k\alpha \sin kt - \varepsilon\Big[\mathbf{E}_s \sin kt - \mathbf{E}_c \cos kt\Big].$$

Telles sont les formules générales que nous nous proposions d'établir, comme seconde approximation des formules du pendule simple.

On remarquera qu'on peut mettre les fonctions **E** sous la forme

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{k^2\alpha}\int_{-\alpha}^{\theta} \varphi(t)\, d\theta,$$

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{k^2\alpha}\int_{0}^{\theta'} \varphi(t)\, d\theta'.$$

9. **Points remarquables de la trajectoire.** — 1° *Durée d'une oscillation simple.* — Faisant $\frac{d\theta}{dt} = 0$ dans la formule (5) et remplaçant, dans le crochet, kt par sa valeur π, en première approximation ($\sin kt = 0$ et $\cos kt = -1$), on aura

$$\sin kt = -\frac{\varepsilon}{k\alpha}\mathbf{E}_c(\pi),$$

$\mathbf{E}_c(\pi)$ désignant la valeur que prend l'intégrale $\mathbf{E}_c$ pour $kt = \pi$.

On en déduit

$$kt = \pi - \frac{\varepsilon}{k\alpha}\mathbf{E}_c(\pi)$$

en négligeant un terme en ε^3.

Par suite, l'augmentation ΔT de la durée $T = \frac{\pi}{k}$ d'une

oscillation simple sera donnée par la formule

$$(6) \qquad \Delta T = \frac{\varepsilon}{k^2 \alpha} \mathbf{E}_c(\pi).$$

On voit que *la condition nécessaire et suffisante pour que la durée d'une oscillation simple reste la même que dans le cas du mouvement principal est que*

$$\mathbf{E}_c(\pi) = 0.$$

2° *Amplitude d'une oscillation simple.* — Portant dans l'équation (4), qui donne θ, la valeur

$$kt = \pi - \frac{\varepsilon}{k\alpha} \mathbf{E}_c(\pi),$$

on remplacera, dans le crochet, $\sin kt$ par 0 et $\cos kt$ par -1.

D'autre part, comme $\cos kt$ ne diffère de -1 que par un terme en ε^2, il viendra, en négligeant un terme de cet ordre, pour valeur de l'oscillation θ_m de remontée,

$$\theta_m = \alpha - \frac{\varepsilon}{k} \mathbf{E}_s(\pi),$$

et, par suite, l'augmentation $\Delta\alpha$ de l'angle α sera donnée par la formule

$$(7) \qquad \Delta\alpha = -\frac{\varepsilon}{k} \mathbf{E}_s(\pi).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'amplitude de l'oscillation ne soit pas changée est que

$$\mathbf{E}_s(\pi) = 0.$$

3° *Point le plus bas.* — Pour obtenir ce point, on fera $\theta = 0$ dans la formule (4). Dans le crochet, on

prendra $kt = \frac{\pi}{2}$, d'où $\cos kt = 0$ et $\sin kt = 1$; il viendra

$$\cos kt = -\frac{\varepsilon}{k\alpha}\mathbf{E}_c\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

d'où

$$kt = \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{k\alpha}\mathbf{E}_c\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

et, par suite,

(8) $$\Delta T_{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{k^2\alpha}\mathbf{E}_c\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

La *vitesse* au point le plus bas sera affectée d'une correction

(9) $$\Delta\theta'_m = -\varepsilon\,\mathbf{E}_c\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

10. Résumé. — Ainsi le problème est ramené à l'évaluation de deux intégrales $\mathbf{E}_s$ et $\mathbf{E}_c$ qui dépendent d'une fonction arbitraire $\varphi\left(\theta, \frac{d\theta}{dt}, t\right)$ qu'on sait réduire à une fonction du temps, sous la forme

$$\varphi(-\alpha\cos kt,\ k\alpha\sin kt,\ t).$$

La fonction φ est spéciale à chaque cas particulier et le caractérise : *elle doit être demandée à une étude physique du problème.*

Nous allons maintenant donner quelques exemples où nous spécifierons la fonction φ.

II. — LE MOUVEMENT DU PENDULE DANS UN MILIEU RÉSISTANT.

11. Équation différentielle. — Nous supposons le pendule de longueur constante l_0. La résistance de l'air est une fonction de la *vitesse* $v = l_0\frac{d\theta}{dt}$ du pendule ; nous représenterons par $c\,F(v)$ l'accélération de cette résis-

tance, c étant le *coefficient balistique* du point matériel dont nous étudions les oscillations. $F(v)$ est une fonction quelconque de la vitesse v, qui, cependant, est toujours positive et croissante avec v. Il peut, d'ailleurs, exister dans $F(v)$ un terme constant, indépendant de la vitesse, et qui représentera une *résistance de frottement*.

La résistance $cF(v)$ n'apporte au mouvement principal du pendule, calculé dans l'hypothèse $c = 0$, que des modifications qui, par hypothèse, sont extrêmement petites.

L'équation différentielle du mouvement du pendule, en introduisant le terme retardateur $cF(v)$, est alors la suivante :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2\theta - \frac{c}{l_0} F(v) = 0.$$

L'accélération $cF(v)$ s'oppose, en effet, dans tous les cas, à l'accélération $l_0 \frac{d^2\theta}{dt^2}$ du mobile le long de l'arc décrit.

12. **Équations du mouvement.** — 1° Les équations finies du mouvement seront donc celles du n° 8 où $\frac{c}{l_0}$ remplace ε. On aura ainsi

$$\theta = -\alpha \cos kt + \frac{c}{l_0 k}[\mathbf{E}_s \cos kt - \mathbf{E}_c \sin kt],$$

$$\frac{d\theta}{dt} = k\alpha \sin kt - \frac{c}{l_0}[\mathbf{E}_s \sin kt + \mathbf{E}_c \cos kt]$$

avec les valeurs suivantes des intégrales $\mathbf{E}_s$ et $\mathbf{E}_c$:

$$\mathbf{E}_s = \int_0^t F(k\alpha l_0 \sin kt) \sin kt \, dt,$$

$$\mathbf{E}_c = \int_0^t F(k\alpha l_0 \sin kt) \cos kt \, dt.$$

qu'on peut mettre aussi, en introduisant l'arc s, sous la forme

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{k\alpha l_0} \int_{-\sigma}^{s} \mathrm{F}(v)\, ds,$$

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{k^2\alpha l_0} \int_{0}^{v} \mathrm{F}(v)\, dv.$$

2° L'intégrale $\mathbf{E}_c$ s'obtient immédiatement par une quadrature; en posant $\mathrm{S}(v) = \int_0^v \mathrm{F}(v)\, dv$, on aura

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{k^2\alpha l_0} \mathrm{S}(v).$$

$\mathbf{E}_c$ ne dépend que de la variable v et $\mathrm{S}(v)$ s'annule avec v.

3° L'intégrale $\mathbf{E}_s$ est proportionnelle au *travail*

$$c \int_{-\sigma}^{s} \mathrm{F}(v)\, ds$$

de la résistance de l'air, le long de l'arc.

C'est donc une quantité toujours positive qui ne peut, par suite, s'annuler.

L'intégrale $\mathbf{E}_s$ s'exprimera en fonction de v comme il suit :

On a (3)

$$v = k\alpha l_0 \sin kt,$$

d'où

$$\frac{dv}{dt} = k^2\alpha l_0 \cos kt,$$

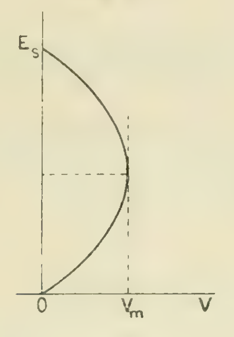
et comme $ds = v\, dt$, on aura

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{k} \frac{1}{(k\alpha l_0)^2} \int_0^v \frac{v\mathrm{F}(v)\, dv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{k^2\alpha^2 l_0^2}}}.$$

Cette intégrale peut être mise sous forme d'une table à double entrée, d'arguments v et $k\alpha l_0$.

La variable v reprenant la même valeur à des dis-

Fig. 3.



tances égales de part et d'autre de la verticale, la fonction E_s présente un axe de symétrie.

Elle ne s'annule pas quand v redevient égale à zéro.

13. **Points remarquables.** — 1° *Durée d'une oscillation simple.* — L'intégrale E_c s'annulant quand la vitesse redevient nulle, on aura

$$E_c(\pi) = 0,$$

et, par suite, d'après le théorème du n° 9, 1°, on aura

$$\Delta T = 0.$$

Donc, *la résistance de l'air n'altère pas la durée des oscillations du pendule.*

Il en est de même d'une *résistance constante* [cas particulier de la fonction $F(v)$].

2° *Amplitude d'une oscillation simple.* — La fonction $E_s(\pi)$ n'est pas nulle.

On aura donc, d'après la formule générale du n° 9, 2°,

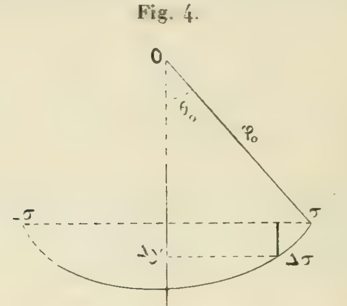
$$\Delta\alpha = -\frac{c}{k l_0}\,\mathbf{E}_s(\pi).$$

On écrira cette formule

$$\Delta\alpha = -\frac{c}{k^2\alpha l_0^2}\int_{-\sigma}^{\sigma} \mathrm{F}(v)\,ds = -\frac{\mathfrak{T}}{k^2\alpha l_0^2},$$

$\mathfrak{T}$ étant le travail total de la résistance le long de l'arc.

Fig. 4.



Soit Δy la différence de hauteur des deux extrémités $-\sigma$ et σ.

On a

$$\Delta y = \alpha\,\Delta\sigma,$$

et comme $k^2 = \frac{g}{l_0}$ et $\sigma = l_0\alpha$, il viendra

$$g\,\Delta y = -\mathfrak{T}.$$

Cette relation exprime le théorème évident que *le travail effectué en moins par la pesanteur a été absorbé par le travail de la résistance de l'air.*

3° Le *temps*, pour arriver au point le plus bas, sera augmenté de la quantité (n° 9, 3°)

$$\Delta\mathrm{T}_{\frac{1}{2}} = \frac{c}{k^2\alpha l_0}\,\mathbf{E}_c\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{c}{k^4\alpha^2 l_0^2}\,\mathrm{S}(v_m),$$

et la *vitesse* au passage de la verticale sera diminuée de

$$\Delta\theta'_m = -\frac{c}{l_0}\mathbf{E}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

III. — CAS D'UNE RÉSISTANCE MONOME.

14. **Forme de la résistance.** — Nous allons étudier, d'une manière spéciale, le cas où la résistance de l'air $cF(v)$ est représentée par une formule monome

$$F(v) = B_n v^n.$$

On posera $b_n = cB_n$, de sorte que l'accélération de la résistance sera exprimée par la formule $b_n v^n$.

Le cas de $n = 0$ correspond à l'hypothèse d'une *résistance de frottement*.

D'après le principe de l'addition des termes correctifs, on obtiendra, par addition des formules monomes, la correction correspondant à la fonction

$$F(v) = B_0 + B_1 v + B_2 v^2 + \ldots + B_n v^n.$$

15. **Calcul des intégrales $\mathbf{E}_c$ et $\mathbf{E}_s$.** — 1° On a

$$\mathbf{E}_c = \int_0^t F(k\alpha l_0 \sin kt)\cos kt\,dt$$
$$= B_n(\alpha l_0)^n k^{n-1}\int_0^{kt}\sin^n kt\cos kt\,dkt,$$

ce qui s'intègre immédiatement par la formule

$$\mathbf{E}_c = \frac{B_n}{n+1}k^{n-1}\alpha^n l_0^n \sin^{n+1} kt.$$

On vérifie d'abord que $\mathbf{E}_c(\pi) = 0$, ainsi qu'on l'a montré dans le cas général (n° 12, 2°).

2° L'intégrale $\mathbf{E}_s$ s'écrira

$$\mathbf{E}_s = \int_0^t \mathrm{F}(k\,\alpha\,l_0 \sin kt) \sin kt\, dt$$
$$= \mathrm{B}_n k^{n-1} (\alpha^n l_0^n) \int_0^{kt} \sin^{n+1} kt\, dkt.$$

Posant, pour abréger, $kt = x$, l'intégrale

$$\mathrm{I}_n = \int_0^x \sin^{n+1} x\, dx$$

est connue. Rappelons comment on en trouve la valeur.

On établit d'abord une relation entre I_n et I_{n-2} en intégrant par parties :

$$\mathrm{I}_n = -\cos x \sin^n x + n \int_0^x \cos^2 x \sin^{n-1} x\, dx$$

$$= -\cos x \sin^n x + n \int_0^x \sin^{n-1} x\, dx - n\,\mathrm{I}_n,$$

d'où

$$(n+1)\,\mathrm{I}_n = -\cos x \sin^n x + n\,\mathrm{I}_{n-2}.$$

On connaît d'ailleurs directement

$$\mathrm{I}_0 = \int_0^x \sin x\, dx = 1 - \cos x$$

et

$$\mathrm{I}_{-1} = \int_0^x dx = x.$$

On établira alors le Tableau de récurrence suivant :

n pair.	n impair.
$\mathrm{I}_0 = -\cos x + 1,$	$\mathrm{I}_{-1} = x.$
$3\,\mathrm{I}_2 = -\cos x \sin^2 x + 2\,\mathrm{I}_0,$	$2\,\mathrm{I}_1 = -\cos x \sin x + \mathrm{I}_{-1},$
$5\,\mathrm{I}_4 = -\cos x \sin^4 x + 4\,\mathrm{I}_2,$	$4\,\mathrm{I}_3 = -\cos x \sin^3 x + 3\,\mathrm{I}_1,$
....	....
$(n+1)\,\mathrm{I}_n = -\cos x \sin^n x + n\,\mathrm{I}_{n-2}.$	$(n+1)\,\mathrm{I}_n = -\cos x \sin^n x + n\,\mathrm{I}_{n-2}.$

Sans chercher, ce qui serait possible, à obtenir l'expression de I_n pour toute valeur de x, proposons-nous seulement d'obtenir la valeur pour $x = \pi$.

On voit que I_0 devient égal à 2 et I_{-1} à π, et que dans tous les autres I_n, le premier terme du second membre s'annule.

Par multiplication membre à membre on obtient alors :

n pair.

$$I_n(\pi) = 2\,\frac{2.4\ldots n}{1.3.5\ldots(n+1)},$$

n impair.

$$I_n(\pi) = \pi\,\frac{1.3.5\ldots n}{2.4.6\ldots(n-1)}.$$

Pour différentes valeurs de n, on aura :

n	0.	1.	2.	3.	4.
I_n	2	»	$2\,\frac{2}{1.3}$	»	$2\,\frac{2.4}{1.3.5}$
I_n	»	$\pi\,\frac{1}{2}$	»	$\pi\,\frac{1.3}{2.4}$	»

n	5.	...	n.	n.
I_n	»	...	$2\,\frac{2.4\ldots n}{1.3.5\ldots(n-1)}$	»
I_n	$\pi\,\frac{1.3.5}{2.4.6}$	...	»	$\pi\,\frac{1.3.5\ldots n}{2.4.6\ldots(n+1)}$

16. **Amplitude de l'oscillation.** — 1° La diminution de l'amplitude de l'oscillation due à la résistance de l'air est (n° 13)

$$\Delta\alpha = -\frac{c}{k l_0}\,\mathbf{E}_s(\pi),$$

ce qui deviendra, dans le cas actuel,

$$\Delta\alpha = -b_n k^{n-2} \alpha^n l_0^{n-1} I_n(\pi),$$

ou encore

$$\Delta\alpha = -\frac{b_n}{g}\left(\frac{\alpha g T}{\pi}\right)^n I_n(\pi).$$

Pour $n = 0$ (résistance de frottement), $\Delta\alpha$ est indépendant de l'angle α et de la durée T de l'oscillation.

Par suite, on peut, par soustractions successives d'un même angle $\Delta\alpha$, trouver l'angle restant au bout d'un nombre p, quelconque, d'oscillations.

Le nombre total P d'oscillations simples, jusqu'à l'arrêt du pendule, est ainsi

$$P = \frac{\alpha}{2}\,\frac{g}{b_0}.$$

Pour $n \geqq 1$, il est évident que le nombre P devient infini.

2° En remplaçant $I_n(\pi)$ par sa valeur, on aura les deux formules suivantes :

$$\Delta\alpha = -\frac{b_n}{g}\left(\frac{\alpha g T}{\pi}\right)^n 2\,\frac{2.4\ldots n}{1.3.5\ldots(n-1)} \qquad (\text{pour } n \text{ pair}),$$

$$\Delta\alpha = -\frac{b_n}{g}\left(\frac{\alpha g T}{\pi}\right)^n \pi\,\frac{1.3.5\ldots n}{2.4.6\ldots(n+1)} \qquad (\text{pour } n \text{ impair}).$$

17. **Point le plus bas.** — On a

$$\Delta T_{\frac{1}{2}} = \frac{c}{k^2\alpha l_0}\,E_c\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{b_n}{n+1}(\alpha l_0)^{n-1}k^{n-3}$$

et

$$\Delta v_m = \frac{k}{2}\,l_0\,\Delta\alpha.$$

(*A suivre.*)

[K12c]

SUR LE PROBLÈME D'APOLLONIUS;

PAR M. MAURICE FOUCHÉ,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

(SUITE.)

III. Passons maintenant au second théorème dont nous rappellerons d'abord l'énoncé :

On considère deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ *sur les*

côtés desquels on prend des semi-droites que nous désignerons comme précédemment par a, b, c, a_1, b_1, c_1. On suppose que ces semi-droites ont leurs directions conjuguées, c'est-à-dire que si l'on mène à un cycle des semi-droites respectivement parallèles aux six précédentes, les points de contact des tangentes parallèles aux semi-droites désignées par la même lettre avec ou sans indice forment trois couples de points appartenant à une même involution sur le cycle. Dans ces conditions, les quatre cycles tangents respectivement aux systèmes de semi-droites abc, ab_1c_1, a_1bc_1, a_1b_1c sont tangents à un même cycle.

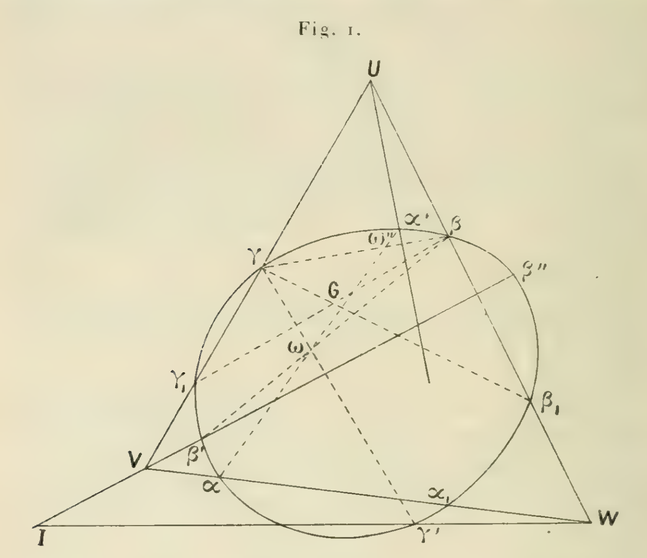
Ce théorème peut être considéré comme une conséquence du suivant :

Théorème I. — *Soit un triangle* UVW *dont les côtés coupent une conique, savoir :* VW *aux points* α *et* α_1, WU *en* β *et* β_1, UV *en* γ *et* γ_1. *Si un triangle* $\alpha'\beta'\gamma'$, *inscrit dans la conique, est homologique à la fois aux deux triangles* UVW *et* $\alpha\beta\gamma$, *le centre d'homologie des deux triangles* $\alpha'\beta'\gamma'$ *et* $\alpha\beta\gamma$ *se trouve sur la droite de Pascal relative à l'hexagone* $\alpha\beta_1\gamma\alpha_1\beta\gamma_1$ *inscrit dans la conique, pourvu toutefois que le triangle* $\alpha'\beta'\gamma'$ *ne se réduise ni à un point ni à une droite, et qu'il n'ait pas deux sommets communs avec le triangle* $\alpha\beta\gamma$.

Pour le démontrer, considérons comme fixes le triangle UVW (*fig.* 1) et la conique, et par suite les six points α, β, γ, α_1, β_1, γ_1. Donnons-nous de plus le point α' sur la conique. Le centre d'homologie des des deux triangles $\alpha'\beta'\gamma'$, UVW sera sur la droite Uα', tandis que le centre d'homologie des deux triangles

$\alpha\beta_1\gamma_1$, $\alpha'\beta'_1\gamma'_1$, sera sur la droite $\alpha\alpha'$. Prenons maintenant sur la conique un point quelconque β'_1 que nous joindrons à β_1. $\beta'_1\beta$ coupera $\alpha\alpha'$ en ω; joignons $\gamma_1\omega$ qui coupera la conique en un second point γ'_1. Le triangle $\alpha'\beta'_1\gamma'_1$ est homologique au triangle $\alpha\beta_1\gamma_1$. Pour qu'il le

Fig. 1.



fût aussi à UVW, il faudrait que le point I d'intersection des deux droites $V\beta'_1$ et $W\gamma'_1$ se trouvât sur $U\alpha'$. Considérons le lieu décrit par le point I quand le point β'_1 parcourt la conique, et cherchons comment il coupe la droite $U\alpha'$.

Si l'on se donne la droite $V\beta'_1$, celle-ci coupera la conique en deux points β'_1, β''_1, à chacun desquels correspondra un point γ'_1 ou γ''_1. $W\gamma'_1$ et $W\gamma''_1$ couperont $V\beta'_1$ en deux points I et I', de sorte qu'on voit déjà que la droite $V\beta'_1$ coupe le lieu en deux points autres que V. Si l'on donne à $V\beta'_1$ la direction VW, on pourra mettre β'_1 en α_1 ou en α. Si on le met en α_1, on trouve

un certain point γ''', et le point I est bien défini en W. Si l'on met β' en α, ω vient aussi en α; γ' y vient aussi, et les deux droites qui déterminent le point I se confondent en VW. Le point I est alors indéterminé, et la droite VW fait partie du lieu; mais le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ se réduit à la droite $\alpha\alpha'$. Cette partie du lieu est donc à rejeter. Enfin, pour toute autre position de β', la droite $V\beta'$ ne passe pas par W. W est donc un point double du lieu complet et un point simple du lieu réduit après suppression de la droite VW. Il en est évidemment de même du point V, car, au lieu de se donner β', on pourrait se donner γ'. Il en résulte que la droite $V\beta'$ coupe le lieu réduit en trois points. Donc ce lieu est une cubique qui coupe la droite $U\alpha'$ en trois points.

Si l'on met β' en α', ω et γ' viennent aussi en α', et le point I également. A cette position particulière correspond un triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ réduit au simple point α'; c'est donc encore une solution singulière à rejeter. Si maintenant on met β' en γ, le point ω est à l'intersection ω'' de $\alpha\alpha'$ avec $\beta\gamma$; γ' vient en β et I en U. Dans ce cas le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ est le triangle $\alpha'\beta\gamma$ homologique à UVW avec U pour centre d'homologie. C'est encore une solution singulière à rejeter.

Ainsi le lieu du point I coupe déjà la droite $U\alpha'$ aux deux points U et α' que nous rejetons. Reste le troisième point d'intersection. Si l'on se donne le point I sur son lieu, on pourra joindre IV qui coupera la conique en deux points β' et β''. A chacun de ces deux points correspondra sur $\alpha\alpha'$ un point ω, ou ω'. ω et ω' seront différents tant que $V\beta'$ ne sera pas tangente à la conique. Ces deux points donneront des points γ' et γ'' différents, et des droites différentes $W\gamma'$, $W\gamma''$. Une seule de ces droites passera en I; l'autre coupera $V\beta'$

au point d'intersection de $V\beta'$ avec la cubique qui ne sera ni V ni I, de sorte qu'à chaque position de I sur son lieu correspond un seul point β' sur la conique, et un seul point ω sur $\alpha\alpha'$. Ainsi, au point I où la cubique rencontre $U\alpha'$ ne correspond qu'un seul point ω sur $\alpha\alpha'$. Quand α' parcourt la conique, ce point ω décrit une ligne qui est le lieu des centres d'homologie avec $\alpha\beta_1\gamma_1$ de tous les triangles inscrits à la conique et homologiques à la fois à UVW et à $\alpha\beta_1\gamma_1$. A la vérité, le lieu complet comprend aussi les trois côtés du triangle UVW qui correspondent à des triangles réduits à une droite passant par α, β_1 ou γ_1; mais ces trois droites ont déjà été supprimées. Le lieu complet comprend aussi le lieu du point α' correspondant aux triangles réduits à ce seul point, et le lieu du point ω'' situé sur $\beta_1\gamma_1$ ainsi que ceux des autres points situés sur $\gamma_1\alpha$ et $\alpha\beta_1$, correspondant au cas où le point I est en U, V ou W. Mais le lieu de α' est la conique même, et ceux des points ω'' sont les côtés du triangle $\alpha\beta_1\gamma_1$. Du reste, toutes ces parties du lieu ont déjà été supprimées. Il reste à démontrer qu'après ces suppressions le lieu du point ω est la droite de Pascal relative à l'hexagone inscrit $\alpha\beta_1\gamma\alpha_1\beta\gamma_1$.

Nous savons déjà que sur chaque droite $\alpha\alpha'$ tirée de α, il n'y a qu'un seul point de ce lieu autre que le point α. Il pourrait se faire que le point α fût un point du lieu. On observera que le point ω ne pourrait venir en β_1 que si $\alpha\alpha'$ passait en β_1, c'est-à-dire si α' venait en β_1. Donc, si β_1 est un point du lieu, ce ne peut être qu'un point simple. Il en est évidemment de même de α, si toutefois on écarte les cas particuliers où la symétrie entre les trois points α, β_1, γ serait rompue, comme par exemple si la droite VW était tangente à la conique. De là résulte que la droite $\alpha\alpha'$ coupe le lieu de ω en deux points ou en un seul. Le lieu de ω est

donc une conique si les points α, β, γ en font partie, une droite dans le cas contraire.

Soient maintenant G, H, K les points d'intersection des côtés opposés de l'hexagone $\alpha\beta_1\gamma\alpha_1\beta\gamma_1$, savoir : G, intersection de $\beta\gamma_1$ et $\gamma\beta_1$; H, de $\gamma\alpha_1$ et $\alpha\gamma_1$; K, de $\alpha\beta_1$ et $\beta\alpha_1$. Le triangle inscrit homologique de $\alpha\beta\gamma$ avec G pour centre d'homologie a son sommet β' en γ_1 et son sommet γ' en β_1. Donc, quelle que soit la position de α' sur la conique, il est homologique à UVW avec U pour centre d'homologie. Donc G fait partie du lieu du point ω, et il en est évidemment de même de H et de K. Mais les trois points G, H, K sont en ligne droite, et c'est la droite de Pascal. Donc, si le lieu de ω passait par α, β, γ, ce serait une conique qui se décomposerait en la droite de Pascal et une autre droite; mais alors, celle-ci devrait passer par les trois points α, β, γ, car la droite de Pascal ne passe par aucun d'eux, tant que les six points restent distincts. Cela est impossible. Donc, enfin, le lieu de ω ne passe par aucun des trois points α, β, γ, et ce lieu est la droite de Pascal. C. Q. F. D.

Remarques. — Si l'un des côtés du triangle, VW par exemple, est tangent à la conique, les deux points α et α_1 sont confondus, et la droite de Pascal passe en α.

Si deux des côtés du triangle sont tangents à la conique, par exemple UV et UW, β se confond avec β_1, γ avec γ_1 et la droite de Pascal est $\beta\gamma$; mais le point G est indéterminé sur cette droite.

Si, enfin, les trois côtés du triangle UVW sont tangents à la conique, les trois points G, H, K sont indéterminés et la droite de Pascal aussi, ce qui laisse à présumer que le lieu du point ω est tout le plan.

c'est-à-dire que tout triangle inscrit à la conique et homologique à l'un des triangles $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, UVW, l'est aussi à l'autre. Cette proposition est, en effet, exacte et peut être démontrée rigoureusement de plusieurs manières. Remarquons que les deux triangles inscrits $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1$, s'ils sont homologiques, forment un hexagone $\alpha_1\beta'_1\gamma_1\alpha'_1\beta_1\gamma'_1$ inscrit à la conique et circonscrit à une autre conique, puisque les diagonales qui joignent les côtés opposés $\alpha_1\alpha'_1$, $\beta_1\beta'_1$, $\gamma_1\gamma'_1$ sont concourantes par hypothèse. On peut alors énoncer la proposition sous la forme suivante :

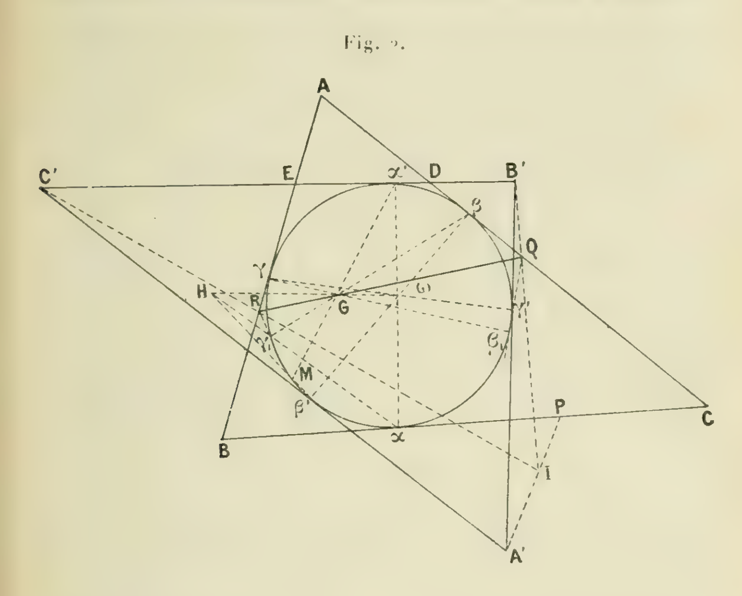
Théorème II. — *Si un hexagone est inscrit à une conique et circonscrit à une autre, les deux triangles formés, l'un par trois sommets non consécutifs et l'autre par les tangentes à la conique circonscrite aux trois autres sommets, sont homologiques.*

Ajoutons que ce théorème présente cette particularité d'être identique à son corrélatif.

Deuxième théorème de M. Bricard. — Soient un triangle ABC et le cycle inscrit qui touche les côtés aux points α, β, γ. Nous supposerons les côtés dirigés suivant AB, BC, CA. Pour construire le second triangle $A_1B_1C_1$, joignons α, β, γ à un point quelconque ω : les trois droites ainsi obtenues coupent le cercle respectivement aux points α', β', γ'. Il suffit de tracer le triangle $A_1B_1C_1$ de manière que ses côtés soient respectivement parallèles à ceux du triangle $A'B'C'$ formé par les tangentes au cycle aux points α', β', γ'. Les côtés de ce triangle doivent être dirigés suivant A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1. Considérons maintenant les cycles O_1, O_2, O_3 respectivement tangents aux systèmes de semi-droites ab_1c_1, bc_1a_1, ca_1b_1. Le centre de similitude des

cycles O et O_1 se trouve d'une part sur la tangente commune a ou BC, et d'autre part sur la droite A_1A' qui joint les points d'intersection des tangentes respectivement parallèles b' et c' au cycle O, et b_1 et c_1 au cycle O_1. Ce centre de similitude est donc à l'inter-

Fig. 2.



section P de BC avec A_1A'. De même, les centres de similitude de OO_2 et de OO_3 sont respectivement en Q et R, aux points d'intersection de AC avec B_1B' et de CA avec $C_1C'_1$. De plus, les trois droites A_1A', B_1B', C_1C' concourent au point I, centre d'homothétie des deux triangles $A_1B_1C_1$ et $A'B'C'$. Cette remarque nous dispense de tracer le triangle $A_1B_1C_1$.

Cherchons d'abord un des cycles tangents aux trois cycles O, O_2, O_3. Nous mènerons des centres de similitude Q et R les secondes tangentes au cycle O, $Q\beta_1$ et $R\gamma_1$; puis nous joindrons $\beta\gamma_1$ et $\gamma\beta_1$ qui se coupe-

ront en G sur l'axe de similitude QR. Il faudra joindre G au point de contact d'une des tangentes à O parallèles à l'une des tangentes communes à O_2 et O_3. Or, a_1 ou B_1C_1 est l'une de ces tangentes communes, et elle est parallèle à $B'C'$ qui touche le cycle O en α'. Il faudra donc joindre $G\alpha'$ qui coupera le cycle O en un second point M, lequel sera le point de contact avec O d'un cycle tangent à O, O_2, O_3. Le théorème sera démontré si l'on fait voir qu'on retrouvera le même point M quand on répétera la construction précédente en partant des combinaisons de cycles O, O_1, O_2 ou O, O_1, O_3.

Soient H et K les points obtenus par la construction qui a servi à déterminer le point G, mais en partant des points Q et R ou P et Q, et soit α_1 le point de contact de la seconde tangente au cycle O issue de P. Les points G, H, K sont sur une même droite qui est la droite de Pascal relative à l'hexagone inscrit $\alpha\beta_1\gamma\alpha_1\beta\gamma_1$. La polaire de A' est la droite $\beta'\gamma'$. Celle de P est $\alpha\alpha_1$. Donc $\beta'\gamma'$ et $\alpha\alpha_1$ se coupent en un point qui est le pôle de A'P et se trouve par conséquent situé sur la polaire de I. De même, les intersections respectives de $\gamma'\alpha'$ avec $\beta\beta_1$ et de $\alpha'\beta'$ avec $\gamma\gamma_1$ sont sur la même polaire. Il en résulte que le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ est homologique au triangle UVW formé par les trois droites $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$. Le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ est donc dans le cas du théorème I, et le point ω, centre d'homologie des triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$, est sur la droite GHK, droite de Pascal relative à l'hexagone inscrit $\alpha\beta_1\gamma\alpha_1\beta\gamma_1$.

Cela posé, désignons toujours par M le second point d'intersection de $G\alpha'$ avec le cercle, et considérons l'hexagone inscrit $M\alpha'\alpha\gamma_1\beta\beta'$. Les côtés opposés $M\alpha'$, $\gamma_1\beta$ se coupent en G_1, $\alpha'\alpha$, $\beta\beta'$, en ω. Donc $\alpha\gamma_1$ et $\beta'M$ se coupent sur la droite ωG, qui est la même que GHK, mais $\alpha\gamma_1$ coupe cette droite en H. Donc $\beta'M$ passe en H,

ou $H\beta'_1$ en M. Un autre hexagone montrerait que $K\gamma'_1$ passe aussi en M. C. Q. F. D.

Remarques. — Le point M ne dépend que des triangles ABC, A'B'C', et du point I. Il y a plus. Faisons pivoter la droite B'I autour de BI et cherchons le lieu que doit décrire le point I pour que le point M reste invariable. A chaque position de B'I correspond sur AC un seul point Q, et sur le cercle un seul point de contact β_1 de la deuxième tangente $Q\beta_1$. En joignant $\beta_1\gamma$ on trouve sur $\alpha'M$ un seul point G; en joignant QG, on a sur AB le point R, et enfin, en joignant C'R, on a sur B'I le point I. Il est clair que si l'on fait la construction en partant de ce point I et des points Q et R, on retrouvera le point M. De là résulte aussi que les droites B'I et C'I sont deux rayons homologues de deux faisceaux homographiques. Si l'on donne à B'I la direction B'C', le point Q est en D, à l'intersection de AC avec B'C', le point β_1 en α', G aussi en α' et R en E, à l'intersection de AB avec B'C'. Donc C'I devient C'B', et le point I est indéterminé sur B'C'. Donc le lieu du point I se compose de la droite B'C', partie singulière, et d'une autre droite.

Nous savons d'après le théorème II que les deux triangles A'B'C' et $\alpha\beta_1\gamma_1$ sont homologiques. L'hexagone à la fois inscriptible et circonscriptible est $\alpha\beta'_1\gamma\alpha'\beta\gamma'_1$. Les trois droites $A'\alpha$, $B'\beta_1$, $C'\gamma_1$ passent donc par un même point φ. Si l'on met I en coïncidence avec φ, le triangle PQR se confond avec le triangle $\alpha\beta_1\gamma_1$. Les points G, H, K et par suite le point M sont indéterminés, ce qui s'explique par ce fait, facile à vérifier, que dans ce cas les trois cycles O_1, O_2, O_3 sont tangents au cycle O respectivement aux points α, β_1, γ_1, de sorte que le cycle tangent aux quatre cycles est le

cycle O lui-même. Il en résulte que la droite décrite par le point I, quand on se donne le point M, passe par le point φ quelle que soit la position du point M sur le cercle O. On peut donc ajouter au deuxième théorème de M. Bricard, la remarque suivante :

Le cycle tangent aux quatre cycles considérés touche le cycle inscrit au triangle ABC *en un point qui reste fixe, quand, laissant fixe le deuxième triangle circonscrit* $A'B'C'$, *on remplace le triangle* $A_1B_1C_1$ *par un autre, homothétique de* $A'B'C'$ *par rapport au même centre* I, *ou même, si l'on déplace ce centre d'homothétie sur une droite passant par le point de concours des droites qui joignent les sommets du triangle* $A'B'C'$ *aux points de contact avec le cycle* O *des côtés correspondants du triangle* ABC.

[I23a]

CONTINUANTS : APPLICATIONS A LA THÉORIE DES NOMBRES ;

Par M. A. DELTOUR.

(SUITE.)

RÉDUCTION D'UN CONTINUANT DE FORME GÉNÉRALE.

25. Les considérations exposées précédemment se rapportent exclusivement aux continuants assujettis aux conditions indiquées au n° 2 ($b_h = -c_h = 1$) et qu'on pourrait appeler *continuants normaux*.

Ceux-ci forment une classe particulière de continuants caractérisée par le système de valeurs attribuées aux éléments b et c.

Il importe de montrer que la restriction ainsi apportée à la notion primitive ne diminue qu'en apparence

la généralité des questions relatives aux continuants et que la forme indiquée au n° 1 se ramène à celle du n° 2.

26. *Tout continuant* M_1 *où les éléments* b_h, c_h *ont des valeurs quelconques (forme du n° 1) se transforme, à un facteur près* D_k, *en un continuant normal* M *de même ordre : si l'on pose* $-b_h c_h = d_h$, *le facteur* D_k *est un produit de termes tels que* d_h.

Pour faire cette transformation, il faut réduire à l'unité les éléments b et $-c$ du déterminant du n° 1.

On posera, pour toute valeur de h,

$$-c_h = c'_h$$

et

$$b_h c'_h = d_h.$$

Divisons successivement les éléments :

De la 2e colonne par b_1,	De la 2e ligne par c'_1,
» 3e » $\frac{b_2}{c'_1}$,	» 3e » $\frac{c'_2}{b_1}$,
» 4e » $\frac{b_3 b_1}{c'_2}$,	» 4e » $\frac{c'_3 c'_1}{b_2}$,
....	.....................,
» he » $\frac{b_{h-1} b_{h-3} \cdots}{c'_{h-2} c'_{h-4} \cdots}$,	» he » $\frac{c'_{h-1} c'_{h-3} \cdots}{b_{h-2} b_{h-4} \cdots}$,
....	....

Le déterminant M_1 sera lui-même divisé :

Après la 1re opération par d_1,

» 2e » $\frac{d_2}{d_1}$,

» 3e » $\frac{d_3 d_1}{d_2}$,

..............................,

» $(h-1)$e » $\frac{d_{h-1} d_{h-3} \cdots}{d_{h-2} d_{h-4} \cdots}$.

....

et dans l'ensemble par $D_k = d_{k-1} d_{k-3} \dots$.

Le déterminant M_1 devient le continuant

$$M = \left(a_1,\ a_2 \frac{1}{d_1},\ a_3 \frac{d_1}{d_2},\ a_4 \frac{d_2}{d_3 d_1},\ \ldots,\ a_h \frac{d_{h-2} d_{h-4} \ldots}{d_{h-1} d_{h-3} \ldots},\ \ldots,\ a_k \frac{d_{k-2} \ldots}{d_{k-1} \ldots}\right).$$

On a donc

$$\text{(VII)} \qquad M_1 = D_k M.$$

27. *On donne à* M *une forme symétrique* M′ *en employant le procédé de transformation du* n° 16 (*Remarque*).

Il y a lieu de distinguer deux cas, suivant la parité de k.

Supposons-le d'abord pair et posons

$$d_h = e_h^2,$$

$$t = \frac{e_{k-2} e_{k-4} \ldots}{e_{k-1} e_{k-3} \ldots}.$$

Les éléments de M′ que nous représenterons par a'_h ont pour valeur

$$a'_1 = a_1 t,$$

$$a'_2 = \left(a_2 \frac{1}{d_1}\right) \frac{1}{t},$$

. . . .

$$a'_{2h} = a_{2h} \frac{e_{k-1} e_{k-3} \ldots e_{2h+1} \cdot e_{2h-2} e_{2h-4} \ldots e_2}{e_{k-2} e_{k-4} \ldots e_{2h} \cdot e_{2h-1} e_{2h-3} \ldots e_1},$$

$$a'_{2h+1} = a_{2h+1} \frac{e_{k-2} e_{k-4} \ldots e_{2h-2} \cdot e_{2h-1} e_{2h-3} \ldots e_1}{e_{k-1} e_{k-3} \ldots e_{2h-1} \cdot e_{2h} e_{2h-2} \ldots e_2},$$

. . . .

La formule (VII) devient

$$M_1 = D_k M'.$$

Par exemple, pour $k = 6$,

$$M_1 = d_5 d_3 d_1 \left(a_1, a_2 \frac{1}{d_1}, a_3 \frac{d_1}{d_2}, a_4 \frac{d_2}{d_3 d_1}, a_5 \frac{d_3 d_1}{d_4 d_2}, a_6 \frac{d_4 d_2}{d_5 d_3 d_1}\right)$$

$$= e_5^2 e_3^2 e_1^2 \left(a_1 \frac{e_4 e_2}{e_5 e_3 e_1}, a_2 \frac{e_5 e_3}{e_4 e_2 e_1}, a_3 \frac{e_4 e_1}{e_5 e_3 e_2}, \right.$$

$$\left. a_4 \frac{e_5 e_2}{e_4 e_3 e_1}, a_5 \frac{e_3 e_1}{e_5 e_4 e_2}, a_6 \frac{e_4 e_2}{e_5 e_3 e_1}\right).$$

En second lieu, si k est impair, posons

$$t = D_{k-1} = d_{k-2} d_{k-4} \ldots,$$

et divisons M par t; on obtiendra pour les éléments de M' les valeurs

$$a'_1 = a_1 \frac{1}{t},$$

$$a'_2 = \left(a_2 \frac{1}{d_1}\right) t,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a'_{2h} = a_{2h} . d_{k-2} . d_{k-4} \ldots d_{2h+1} . d_{2h-2} d_{2h-4} \ldots d_2,$$

$$a'_{2h+1} = a_{2h+1} \frac{1}{d_{k-2} d_{k-4} \ldots d_{2h+1} . d_{2h} d_{2h-2} \ldots d_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La formule (VII) devient alors

$$M_1 = D_k D_{k-1} M'.$$

Par exemple, pour $k = 5$, on a

$$M_1 = d_4 d_3 d_2 d_1 \left(\frac{a_1}{d_3 d_1}, a_2 d_3, \frac{a_3}{d_3 d_2}, a_4 d_2, \frac{a_5}{d_4 d_2}\right).$$

28. Réciproquement, *un continuant normal* M *se transforme en un continuant* M_1 *de même ordre dans lequel les éléments b et c appartiennent à un système de valeurs donné.*

La formule (VII) dans laquelle les valeurs d_h sont connues permet, en effet, de déterminer un élément

quelconque a_h de M_1 au moyen de l'élément correspondant de M.

Comme conséquence, un continuant formé au moyen d'un système déterminé de valeurs des éléments b et c (les a restant variables) se transforme, à un facteur près, en un continuant formé au moyen d'un système donné d'éléments b et c différent du premier.

Tout continuant peut donc se ramener à ce dernier pris comme type.

Le système dans lequel on a

$$\begin{cases} b_h = 1, \\ c_h = -1, \end{cases}$$

ou plus simplement $d_h = 1$, a été choisi de préférence parce que tous les termes du développement sont positifs et les coefficients par rapport aux éléments a_h égaux à $+1$.

DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DES CONTINUANTS ALTERNÉS

29. Dans certains cas, on trouve avantage à écrire les continuants dans le système qui correspond à l'hypothèse

$$d_h = -1.$$

Si M_1 est un tel continuant, les expressions D_k et M de la formule (VII) ont pour valeurs

$$\begin{cases} D_k = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}, \\ M = (a_1, -a_2, a_3, -a_4, \ldots, (-1)^{k-1} a_k), \end{cases}$$

c'est-à-dire que M_1 se transforme en un continuant normal dont les éléments sont les éléments a de M_1 affectés alternativement des signes $+$ et $-$.

Les continuants M_1 pour lesquels $d_h = -1$ seront désignés sous le nom de *continuants alternés.*

30. *Notation.* — Pour les représenter, il sera commode d'employer le symbole des imaginaires.

En appliquant à l'expression précédente de M le procédé de transformation du n° 16 (*Remarque*), pour $t = i$, M_1 se trouve représenté de la manière suivante :

$$M_1 = i^{3k}(ia_1, ia_2, ia_3, \ldots, ia_k).$$

La suite $a_1, a_2, \ldots, a_k$ étant désignée par α, la suite $ia_1, ia_2, \ldots, ia_k$ sera désignée par $i\alpha$.

On écrira donc

$$\text{(VIII)} \qquad M_1 = i^{3n_\alpha}(i\alpha).$$

Remarque. — Il résulte de ce qui précède (n°s 29 et 30) qu'on a

$$\text{(IX)} \qquad (i\alpha') = i^{n_\alpha^2}(\alpha),$$

en désignant par α' la suite α dont les éléments de rang pair ont changé de signe.

31. *Transformation d'un continuant alterné par l'introduction de suites correspondant à* $\theta, \theta', \eta, \eta'$. — De leur mode de représentation (n° 30) découlent les propriétés des continuants alternés sur lesquelles il est inutile d'insister et dont une seule sera mise ici en évidence.

Soient λ une des suites $\theta, \theta', \eta, \eta'$; λ' la même suite dont les éléments de rang pair ont changé de signe.

On a, d'après (IX),

$$\left\{\begin{aligned} (i\lambda') &= i^{n_\lambda^2}(\lambda), \\ (i\lambda'_{1,1}) &= i^{n_\lambda^2}(-\lambda_{1,1}), \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} (i\lambda'_{0,1}) &= i^{(n_\lambda-1)^2}(\lambda_{0,1}) &= 0, \\ (i\lambda'_{1,0}) &= i^{(n_\lambda-1)^2}(-\lambda_{1,0}) &= 0. \end{aligned}\right.$$

Si λ est du type θ ou θ', n_λ est pair, et l'on a

$$(-\lambda_{1,1}) = (\lambda_{1,1}) = (\lambda).$$

Si λ est du type η ou η', n_λ est impair et l'on a

$$(-\lambda_{1,1}) = -(\lambda_{1,1}) = (\lambda).$$

Dans tous les cas, on trouve

$$(i\lambda'_{1,1}) = (i\lambda').$$

On a, par conséquent, les valeurs suivantes :

	$(i\lambda')$.	$(i\lambda'_{1,1})$.	$(i\lambda'_{0,1})$.	$(i\lambda'_{1,0})$.
Pour $\lambda = \theta$	1	1	0	0
» θ'	-1	-1	0	0
» η	i	i	0	0
» η'	$-i$	$-i$	0	0

La formule T_2 (n° 11) appliquée à un continuant tel que $(i\alpha, i\lambda', i\beta)$ donne

$$\text{(X)} \qquad (i\alpha, i\lambda', i\beta) = (i\lambda')(i\alpha, i\beta),$$

où $(i\lambda')$ prend dans le second membre l'une des valeurs ± 1, $\pm i$.

A ce facteur près, la valeur d'un continuant n'est pas modifiée par l'introduction d'une suite $i\lambda'$ entre deux de ses éléments.

Remarque. — Les calculs du n° 23 restent applicables lorsqu'on y remplace (λ) par $(i\lambda')$ et qu'on pose $(\mu) = (1\mu')$, puisque les éléments considérés sont des quantités quelconques et peuvent en particulier admettre i comme facteur.

Or, comme on vient de le voir, on a toujours $(i\lambda') = (i\lambda'_{1,1})$.

Les propositions des n°s 23 et 24 se résument par conséquent en celle-ci : *quel que soit le type auquel*

appartient $(i\lambda')$, les continuants obtenus par permutation circulaire des éléments de $(i\lambda')$ appartiennent au même type.

L'adjoint $((i\lambda'))$ a l'une des valeurs ± 2, $\pm 2i$.

CONTINUANTS DONT LES ÉLÉMENTS SONT ASSUJETTIS A CERTAINES CONDITIONS.

32. On conçoit qu'en imposant aux éléments certaines conditions, les principes exposés précédemment conduisent à des formules nombreuses et variées suivant les hypothèses faites.

En voici quelques exemples :

33. I. *Continuants composés de suites périodiques.* — Considérons un continuant normal $(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$ dans lequel une suite quelconque d'éléments α est répétée périodiquement.

Représentons-le par (α^m), m étant le nombre des périodes, et de même représentons $(\alpha_{u,0}, \alpha, \ldots, \alpha, \alpha_{0,v})$ par $(\alpha^m_{u,v})$. [m, u, v étant des nombres entiers positifs.]

Considérons les deux adjoints $((\alpha^m))$ et $((\alpha^m, \gamma))$; posons

$$(B_1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{i^{m n_\alpha}((\alpha^m, \gamma))}{2}\, g = P_m, \\ &\frac{i^{m n_\alpha}((\alpha^m))}{2} = Q_m ; \end{aligned}\right.$$

dans la première égalité, la valeur de g est donnée par l'expression

$$g^2 = \frac{4(-1)^{n_\alpha} - ((\alpha))^2}{((\alpha, \gamma))^2},$$

qu'on peut écrire (nos 19 et 22)

$$g^2 = \frac{-4\,\alpha_{0,1}\,\alpha_{1,0} - ((\alpha, \gamma))^2}{((\alpha, \gamma))^2} = \frac{-4\,\alpha_{0,1}\,\alpha_{1,0}}{((\alpha, \gamma))^2} - 1.$$

34. Les fonctions P_m, Q_m définies ci-dessus jouissent de la propriété suivante :

P_m et Q_m *ont avec* P_1 et Q_1 *les mêmes relations que* $\sin mx$ et $\cos mx$ *avec* $\sin x$ et $\cos x$, *x étant quelconque,* savoir :

$$(B_2) \qquad \begin{cases} P_m = P_{m-1}\,Q_1 - Q_{m-1}\,P_1, \\ Q_m = Q_{m-1}\,Q_1 - P_{m-1}\,P_1, \end{cases}$$

$$P_m^2 - Q_m^2 = 1.$$

La dernière est, du reste, la conséquence des deux autres, puisqu'on a, en tenant compte de l'expression de g,

$$P_1^2 - Q_1^2 = 1.$$

Pour démontrer la première, remplaçons les P et Q par leurs valeurs tirées de (B_1). Après avoir éliminé le facteur commun $\dfrac{i^{mn_\alpha}}{4}\,g$, cette relation devient

$$2((\alpha^m, \eta_1)) = ((\alpha^{m-1}, \eta_1))((\alpha)) + ((\alpha^{m-1}))((\alpha, \eta_1)).$$

Or, le second membre a pour valeur

$$\begin{gathered}[(\alpha^{m-1}) - (\alpha_{1,1}^{m-1})]\,[(\alpha) + (\alpha_{1,1})] \\ + [(\alpha^{m-1}) + (\alpha_{1,1}^{m-1})]\,[(\alpha) - (\alpha_{1,1})]\end{gathered}$$

et devient, après réduction,

$$\begin{aligned} & 2(\alpha)(\alpha^{m-1}) - 2(\alpha_{1,1})(\alpha_{1,1}^{m-1}) \\ = {} & 2[(\alpha)(\alpha^{m-1}) + (\alpha_{0,1})(\alpha_{1,0}^{m-1})] - 2[(\alpha_{1,0}^{m-1})(\alpha_{0,1}) + (\alpha_{1,1}^{m-2})(\alpha_{1,1})] \\ = {} & 2(\alpha^m) - 2(\alpha_{1,1}^m) \\ = {} & 2((\alpha^m, \eta_1)). \end{aligned}$$

La seconde des relations (B_2) devient de même, après élimination du facteur commun $\dfrac{i^{mn_\alpha}}{4}$,

$$\begin{aligned} 2((\alpha^m)) &= ((\alpha^{m-1}))((\alpha)) - ((\alpha^{m-1}, \eta_1))((\alpha, \eta_1))\,g^2 \\ &= ((\alpha^{m-1}))((\alpha)) + ((\alpha^{m-1}, \eta_1))((\alpha, \eta_1)) + \frac{4\,\alpha_{0,1}\,\alpha_{1,0}\,((\alpha^{m-1}, \eta_1))}{((\alpha\eta_1))}. \end{aligned}$$

De l'identité

$$(\alpha^{m}_{1,0}) = (\alpha^{m-1}_{1,0})(\alpha) + (\alpha^{m-1}_{1,1})(\alpha_{1,0}) = (\alpha_{1,0})(\alpha^{m-1}) - (\alpha_{1,1})(\alpha^{m-1}_{1,0}),$$

on déduit

$$\alpha_{1,0}\,[(\alpha^{m-1}) - (\alpha^{m-1}_{1,1})] = (\alpha^{m-1}_{1,0})\,[(\alpha) - (\alpha_{1,1})],$$

c'est-à-dire

$$\alpha_{1,0}\,((\alpha^{m-1}, \eta)) = (\alpha^{m-1}_{1,0})\,((\alpha, \eta)).$$

L'égalité ci-dessus devient alors

$$2((\alpha^{m})) = ((\alpha^{m-1}))((\alpha)) + ((\alpha^{m-1}, \eta))((\alpha, \eta)) + 4\alpha_{0,1}(\alpha^{m-1}_{1,0}).$$

Or, on a

$$2(\alpha^{m}) = 2(\alpha)(\alpha^{m-1}) + 2(\alpha_{0,1})(\alpha^{m-1}_{1,0}),$$
$$2(\alpha^{m}_{1,1}) = 2(\alpha^{m-1}_{1,1})(\alpha_{1,1}) + 2(\alpha^{m-1}_{1,0})(\alpha_{0,1}),$$

et en ajoutant

$$2((\alpha^{m})) = 2(\alpha)(\alpha^{m-1}) + 2(\alpha_{1,1})(\alpha^{m-1}_{1,1}) + 4\alpha_{0,1}(\alpha^{m-1}_{1,0}),$$

égalité qu'il est facile d'identifier avec la précédente qui se trouve ainsi démontrée.

35. *Conséquence.* — On sait que $\frac{\sin mx}{\sin x}$ et $\cos mx$ s'expriment au moyen d'une fonction entière de $\cos x$. De même, par conséquent, $\frac{P_m}{P_1}$ et Q_m par rapport à Q_1.

Or, Q_1 ne dépend que de $((\alpha))$ et de n_α. $\frac{P_m}{P_1}$ et Q_m restent donc invariables si à la suite α on en substitue une autre β, telle que

$$n_\alpha \equiv n_\beta \pmod 4$$

et

$$((\alpha)) = ((\beta)).$$

Par exemple, on peut prendre pour β l'une des suites obtenues par permutation circulaire des éléments de α.

Les conditions sont encore remplies si, n_α étant $\equiv 1 \pmod 4$, on prend pour β un seul élément b ayant pour valeur $((\alpha)$.

On a, en posant $b = ((\alpha)$,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{P_m}{i^{m-1}\, P_1} &= \frac{((\alpha^m, \eta_1)}{((\alpha, \eta_1)} = \frac{((b^m, \eta_1)}{((b, \eta_1)}, \\ \frac{2\,Q_m}{i^m} &= ((\alpha^m) = ((b^m), \end{aligned}\right.$$

puisque $\frac{P_m}{P_1}$ et Q_m restent invariables par la substitution de b à α.

En faisant usage de l'identité déjà vue

$$\alpha_{1,0}\,((\alpha^{m-1}, \eta_1) = (\alpha_{1,0}^{m-1})\,((\alpha, \eta_1)$$

appliquée à α et à b, la première de ces égalités peut s'écrire

$$\frac{P^m}{i^{m-1}\, P_1} = \frac{(\alpha_{1,0}^m)}{(\alpha_{1,0})} = \frac{(b^{m-1})}{1}$$

et, en remplaçant, dans les deux, b par sa valeur

$$(b = ((\alpha) = 2\,i^{-1}\,Q_1,$$

on a

$$(B_3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{P_m}{P_1} &= i^{m-1}\,([2\,i^{-1}\,Q_1]^{m-1}), \\ Q_m &= \frac{i^m}{2}\,(([2\,i^{-1}\,Q_1]^m). \end{aligned}\right.$$

Le développement des seconds membres, dans lesquels Q_1 est remplacé par $\cos x$, donne l'expression de $\frac{\sin mx}{\sin x}$ et de $\cos mx$.

Ainsi se mettent sous forme de continuant et d'adjoint les expressions connues de $\frac{\sin mx}{\sin x}$ *et de* $\cos mx$ *en fonction de* $\cos x$.

36. En faisant $n_\alpha \equiv 2 \pmod 4$ et

$$((bc) = ((\alpha),$$

on trouve, par un calcul analogue,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{P_m}{P_1} &= i^{2(m-1)}((\gamma_{1,0}^m), \\ Q_m &= \frac{i^{2m}}{2}((\gamma^m), \end{aligned}\right.$$

où γ représente la suite des deux éléments, bc, 1.

On a d'ailleurs

$$((bc) = 2i^{-2}Q_1 = -2Q_1,$$

d'où

$$bc = -2Q_1 - 2.$$

En remplaçant l'élément bc par cette valeur, on a une nouvelle expression des mêmes fonctions sous forme de continuant et d'adjoint.

37. Aucune hypothèse n'a été faite sur les signes des éléments de α. Les calculs précédents sont, par conséquent, applicables à $-\alpha$.

Posons

$$(B_4)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{i^{-mn_\alpha}((-\alpha^m . r_1)}{2}\, g' &= P_{-m}, \\ \frac{i^{-mn_\alpha}((-\alpha_m)}{2} &= Q_{-m}. \end{aligned}\right.$$

Dans la première égalité, g' est déterminé par la condition $g + g' = 0$.

On pourrait répéter les mêmes calculs que pour P_m et Q_m. Nous allons vérifier seulement que, de même qu'on a

$$\sin -mx = -\sin mx,$$

$$\cos -mx = \cos mx,$$

on a aussi

$$P_{-m} = -P_m,$$

$$Q_{-m} = Q_m.$$

On a en effet

$$((-\alpha^m, r_1) = (-1)^{mn_\alpha}((\alpha^m, r_1),$$

d'où

$$\frac{P_{-m}}{P_m} = \frac{i^{-mn_\alpha}(-1)^{mn_\alpha}}{i^{mn_\alpha}} \frac{g'}{g} = -1.$$

On a aussi

$$((-\alpha^m) = (-1)^{mn_\alpha}((\alpha^m),$$

d'où

$$\frac{Q_{-m}}{Q_m} = \frac{i^{-mn_\alpha}(-1)^{mn_\alpha}}{i^{mn_\alpha}} = 1.$$

38. On peut se rendre compte de la manière dont on passe des termes négatifs aux termes positifs en mettant (b^m) sous la forme $(-b^p, o, b^{p+1+m})$ (p entier) qui lui est équivalente, puisqu'elle se réduit à (o, b^{m+1}).

De même $(-b^m)$ sous la forme $(-b^{m+1+p}, o, b^p)$.

On a la correspondance suivante :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & \dfrac{P_{-m}}{i^{-(m-1)}P_{-1}} & \cdots & \dfrac{P_{-2}}{i^{-1}P_{-1}} & \dfrac{P_{-1}}{P_{-1}} & \underbrace{\dfrac{P_0}{iP_{-1}}} & . & \underbrace{\dfrac{P_0}{i^{-1}P_1}} & \dfrac{P_1}{P_1} & \dfrac{P_2}{iP_1} & \cdots & \dfrac{P_m}{i^{m-1}P_1} \\
= & (-b^{m-1}) & & (-b) & (-b, o) & & (o) & & (o, b) & (b) & & (b^{m-1}) \\
 & \dfrac{2Q_{-m}}{i^{-m}} & \cdots & \dfrac{2Q_{-2}}{i^{-2}} & \dfrac{2Q_{-1}}{i^{-1}} & & \dfrac{2Q_0}{1} & & \dfrac{2Q_1}{i^1} & \dfrac{2Q_2}{i^2} & \cdots & \dfrac{2Q_m}{i^m} \\
= & ((-b^m) & & ((-b^2) & ((-b) & \underbrace{((-b, o)} & = & \underbrace{((o, b)} & ((b) & ((b^2) & \ldots & ((b^m).
\end{array}$$

Par convention, on fait $P_0 = o$, $Q_0 = 1$, valeurs qui résultent du Tableau précédent, aussi bien que de l'analogie avec les fonctions trigonométriques.

Remarque. — On trouve, pour des continuants tels que $(\alpha^m, \alpha'^{m'}, \ldots)$, où l'on considère des suites α^m différentes, des formules de récurrence plus générales, mais sans utilité pour les questions traitées dans les parties suivantes.

39. II. *Décomposition d'un continuant en une somme de deux autres.* — La formule suivante permet de décomposer un continuant en une somme de

deux autres ayant une valeur particulière

$$(B_5) \qquad (\alpha, 1, 1, \beta) = (\alpha, 1, \beta) + (\alpha, \beta).$$

Elle peut encore se mettre sous la forme

$$(\alpha, a+1, b+1, \beta) = (\alpha, a+b+1, \beta) + (\alpha, a, b, \beta).$$

Lorsque α est remplacé par o, elle se réduit à l'identité

$$(a, \alpha) = (a-1, \alpha) + (\alpha),$$

et, si α s'évanouit, à

$$(a+1, b+1, \beta) = (a+b+1, \beta) + (a, b, \beta).$$

Remarque. — La formule (B_5), dont la vérification ne présente pas de difficulté, s'applique aussi bien aux adjoints qu'aux continuants.

40. III. *Représentation de certaines formes algébriques :* 1° *Puissances* x^m. — Soient :

(**a**). (α) un continuant de valeur x,

(**b**). (ν) un continuant satisfaisant aux conditions

$$\nu_{1,1} = 0,$$
$$\nu_{0,1} + \nu_{1,0} = 0,$$

pour lesquelles il faut que n_ν soit pair, si les éléments sont des nombres réels (n° 19); on posera, par exemple,

$$(\nu) = (y, \eta),$$

y étant un nombre quelconque qui sera la valeur de (ν);

(**c**). (ρ) un continuant (ν) de valeur 1, par exemple,

$$(0, -1, 1, 0).$$

Les égalités suivantes se vérifient immédiatement en

développant les continuants

$$(\mathrm{B}_6) \quad \begin{cases} (\alpha, \nu, \underline{\alpha}) = (\nu)(\alpha)^2, \\ (\alpha, \underline{\nu}, \underline{\alpha}) = (\nu)(\alpha)^2. \end{cases}$$

Elles servent à former certains continuants ayant pour valeur x^m et composés au moyen de x et des éléments de (α).

En effet, soient $m = 2p + q$ (p, q entiers); (α), (β), (ν) trois continuants ayant pour valeurs respectives x, x^p, et $y = x^q$.

On a

$$(\beta, \nu, \underline{\beta}) = (\nu)(\beta)^2 = x^{2p+q} = x^m.$$

Pour obtenir une représentation de x^m, donnons à q dans cette formule la valeur du résidu de m (mod 2) et à (ν) la forme (ρ) ou (x, η), suivant que $q = 0$, ou $q = 1$.

Il ne restera plus qu'à déterminer (β) en posant, par exemple,

$$(\beta) = (\gamma, \nu', \underline{\gamma}) = x^p.$$

On opérera pour x^p de la même manière que pour x^m et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'exposant soit réduit à 1 ; alors, on appliquera la formule

$$(\alpha, \nu, \underline{\alpha}) = (\nu)\, x^2.$$

Pour $m = 13$, on trouve les formes suivantes :

$$(\overbrace{\alpha, x, \eta, \underline{\alpha}}, \ \rho, \ \overbrace{\alpha, \underline{\eta}, x, \underline{\alpha}}, \ x, \eta, \ \overbrace{\alpha, x, \eta, \underline{\alpha}}, \ \underline{\rho}, \ \overbrace{\alpha, \underline{\eta}, x, \underline{\alpha}}).$$

41. 2° *Formes* xy, $x^2 \pm y^2$. — Les continuants normaux symétriques

$$(\alpha, m, \underline{\alpha}), \ (\alpha, \underline{\alpha}), \ (\alpha, -\underline{\alpha})$$

ont respectivement pour valeurs

$$(\alpha)[m(\alpha)+2(\alpha_{0,1})],\quad (\alpha)^2+(\alpha_{0,1})^2,\quad (-1)^{n_\alpha}[(\alpha)^2-(\alpha_{0,1})^2].$$

x et y étant deux nombres quelconques donnés, on peut poser

$$\text{soit}\ \begin{cases}(\alpha) & =x,\\ m(\alpha)+2(\alpha_{0,1}) & =y,\end{cases}\qquad \text{soit}\ \begin{cases}(\alpha) & =x,\\ (\alpha_{0,1}) & =y,\end{cases}$$

et trouver en général respectivement pour

$$(\alpha, m, \underline{\alpha}) \qquad \text{et} \qquad (\alpha \pm \underline{\alpha})$$

des éléments satisfaisant à ces hypothèses.

On a alors

$$(\mathrm{B}_7)\qquad \begin{cases}(\alpha, m, \underline{\alpha}) = xy,\\ (\alpha, \underline{\alpha}) \quad = x^2+y^2,\\ (\alpha, -\underline{\alpha}) = (-1)^{n_\alpha}(x^2-y^2).\end{cases}$$

Exemples :

$$(2, 3, 4, 3, 2) \quad = 7.32,$$
$$(2, 3, 3, 2) \quad = 7^2+2^2,$$
$$(2, 3, -3, -2) = 7^2-2^2.$$

42. 3° *Formes* $ax^2+2bxy+cy^2$. — On a, pour $e=\pm 1$,

$$(\mathrm{B}_8)\quad e^{n_\alpha}(\alpha, \beta, 0, \underline{e\,\alpha}) = \alpha^2\beta_{0,1} + \alpha\,\alpha_{0,1}(e\beta+\beta_{1,1}) + e\,\alpha_{0,1}^2\,\beta_{1,0}.$$

En posant

$$\begin{cases}(\alpha) \quad = x,\\ (\alpha_{0,1}) = y,\end{cases}\qquad \begin{cases}(\beta_{0,1}) = a, & e(\beta)+(\beta_{1,1}) = 2b,\\ e(\beta_{1,0}) = c,\end{cases}$$

on trouve la forme donnée

$$e^{n_\alpha}(\alpha, \beta, 0, \underline{e\,\alpha}) = ax^2+2bxy+cy^2.$$

Si l'on pose en outre

$$-e(\beta)+(\beta_{1,1})=2t,$$

on en déduit

$$\begin{cases} e(\beta) = b-t, \\ (\beta_{1,1}) = b+t. \end{cases}$$

Le discriminant D a pour valeur

$$\begin{aligned} D = ac-b^2 = e\beta_{0,1}\beta_{1,0} - \left[\frac{e\beta+\beta_{1,1}}{2}\right]^2 \\ = -e(-1)^n\beta - \left[\frac{e\beta-\beta_{1,1}}{2}\right]^2 \\ = \pm 1 - t^2. \end{aligned}$$

43. Une autre manière de représenter cette même forme F, qui peut s'écrire

$$\frac{1}{a}[(ax+by)^2+Dy^2],$$

consiste à poser

$$\frac{x}{(\alpha)} = \frac{y}{(\alpha_{0,1})} = 1,$$

$$\frac{a}{(\gamma)} = \frac{b}{(\gamma_{1,0})} = S,$$

le rapport S étant un nombre quelconque.

On en déduit

$$(B_9) \qquad F = \frac{1}{S(\gamma)}[S^2(\alpha,\gamma)^2+D(\alpha_{0,1})^2].$$

(*A suivre.*)

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Dijon.

Épreuve théorique. — I. *Attraction d'un ellipsoïde de révolution aplati sur un point de sa surface.*

II. *Poids des corps.*

Épreuve pratique. — *Un plateau circulaire homogène pesant, de rayon égal à* 1^{m}, *du poids de* 1^{kg}, *primitivement en repos, peut tourner sans frottement autour de son centre* O *dans un plan horizontal sur lequel il repose. Un insecte* M *du poids de* 10^{g} *se meut sur le bord de ce plateau. Il part du repos et, pendant* 10 *secondes, il se meut de façon que la force qu'il applique au plateau ait constamment pour projection sur la tangente au bord* 3^{g}. *Au bout de ce temps il se meut de façon que le travail de la force qu'il applique au plateau soit proportionnel au temps. On demande le mouvement du plateau, celui de l'insecte sur le plateau et le mouvement absolu de l'insecte.* $g = 9,81$. (Juillet 1907.)

Épreuve théorique. — I. *Établir les formules qui permettent d'étudier le roulement d'un cône mobile sur un cône fixe.*

II. *Sachant que la résultante de deux forces est située dans leur angle et connaissant la composition des forces ayant même ligne d'action, établir la règle du parallélogramme des forces.*

Épreuve pratique. — *Un disque elliptique homogène pesant dont les axes sont* 2^{m} *et* 1^{m}, *et le poids* 1^{kg}, *repose sur deux tiges très minces, le pénétrant normalement; ces tiges sont horizontales et percent le grand axe à* $0^{m},50$ *du centre; elles sont situées à la même hauteur. On enlève brusquement l'une des tiges; on demande, au moment où le disque se met en mouvement, la valeur de la réaction de l'autre tige.* (Novembre 1907.)

Poitiers.

Épreuve théorique. — *Une barre rigide, pesante,* AB, *se déplace dans un plan vertical de manière que ses extrémités* A *et* B *glissent sans frottement sur deux axes rectangulaires* Ox *et* Oy. *Cette barre est amincie vers l'extrémité* A *de manière que la densité linéaire de la barre en un point* P *soit proportionnelle à la distance* PA.

1° *Trouver et discuter le mouvement de* AB :

Masse de AB = M,

AB = $2l$,

Angle de Ox *avec la verticale dirigée vers le bas* = φ,

Angle de Ox *avec* OC (C *milieu de* AB) = θ.

2° *Trouver un point* D *de la barre et une masse* M_1 *tels que, quelles que soient les conditions initiales, la force vive de la barre soit constamment celle qu'aurait dans le mouvement le point* D *s'il était de masse* M_1. *Montrer que le mouvement de* D *est celui que prendrait un point matériel assujetti à glisser sans frottement sur la trajectoire de* D *et placé dans un champ constant* C_1 *dont on déterminera l'intensité et la direction.*

3° *Déterminer et construire les positions d'équilibre de* AB. *Connaissant ces positions peut-on construire la direction du champ* C_1 ?

Épreuve pratique. — 1° *On donne un cube* ABCD, $A_1B_1C_1D_1$; *la vitesse du point* A *est représentée à l'instant que l'on considère par le vecteur* AB, *celle de* C_1 *est portée par* C_1C, *celle de* D_1 *est dans le plan* A_1BCD_1.

Trouver l'axe instantané de rotation et de glissement, la vitesse de glissement et la rotation instantanée.

2° *Un solide homogène a la forme du prisme triangulaire* ABC, $A_1B_1C_1$; *trouver les moments d'inertie de ce solide par rapport à ses neuf arêtes.*

(Novembre 1907.)

Rennes

Épreuve théorique. — I. *Équilibre d'un fil parfaitement flexible et inextensible appliqué sur une surface. Cas où il y a frottement.*

II. Problème. — *Un fil homogène, pesant, flexible et inextensible, est tendu suivant la section droite d'un cylindre non poli à génératrices horizontales. Établir les formules qui donnent en chaque point la tension du fil et la pression sur la surface.*

Cas particulier : *Le cylindre est de révolution; le fil est appliqué sur la demi-circonférence supérieure; les extrémités pendent verticalement et supportent des poids donnés.*

Épreuve pratique. — *On lance verticalement en l'air un objet sphérique avec une vitesse de* 18^{m} *par seconde. La résistance de l'air est supposée proportionnelle au carré de la vitesse et telle que, pour une vitesse de* 80^{m} *par seconde, cette résistance soit égale au poids du mobile.*

Calculer :

1° *La hauteur à laquelle s'élèvera le projectile;*

2° *La durée de la montée et celle de la chute.*

On donne :

$$g = 9^{m},81 ;$$
$$e = 2,7183.$$

(Novembre 1907.)

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Montpellier.

Épreuve théorique. — 1° *Déterminer l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = \frac{\pi}{2} + 4\cos x.$$

2° *Cette intégrale générale étant considérée comme l'équation d'une courbe plane, déterminer les valeurs des constantes arbitraires de façon que cette courbe passe par les points* $x = 0$, $y = 0$ *et* $x = \pi$, $y = 0$, *et qu'en ces deux points elle soit tangente à l'axe des* x.

3° *Calculer l'aire comprise entre l'axe des* x *et la branche de courbe obtenue entre les deux points donnés d'abscisses* 0 *et* π.

Épreuve pratique. — *On considère la portion de l'ellipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

comprise entre deux parallèles au petit axe (Oy), *symétriques par rapport à celui-ci. Soit h la distance qui sépare ces parallèles du petit axe. Si la portion d'ellipse ainsi définie tourne autour du grand axe, elle engendre un tonneau. Calculer son volume en fonction de* **a**, **b**, **h**.

En pratique, s'il s'agissait d'un véritable tonneau, on ne pourrait pas mesurer a, mais on pourrait mesurer le rayon r du fond. Modifier la formule obtenue de manière à obtenir une véritable formule pratique pour le cubage des tonneaux. (Novembre 1907.)

Rennes.

Épreuve théorique. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y + \frac{2a^2}{x^2} = 0.$$

Montrer qu'elle admet l'intégrale particulière

$$(1) \qquad y = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{x} + \frac{x^2}{3a^2}\right).$$

Construire la courbe (C) *représentée par l'équation* (1).

Calculer :

1° *La longueur de l'arc* AM_1 *de* (C) *compris entre les points d'abscisses* **a** *et* x_1;

2° *Les coordonnées du centre de gravité de l'arc* AM_1;

3° *L'expression du rayon de courbure.*

Épreuve pratique. — *Calculer les intégrales définies :*

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(2 + \cos\theta)^2},$$

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(2 + \cos\theta)^2}.$$

(Novembre 1907.)

[17a]

SUR LES MODULES DE LA FORME p^m, p PREMIER (IMPAIR OU PAIR);

PAR M. G. FONTENÉ.

1. La première Partie de ce Mémoire est relative aux modules de la forme p^m, p étant un nombre premier autre que 2; la seconde Partie est relative au module 2^m.

Si on laisse de côté le module 4, qui admet 3 comme racine primitive, on sait que, *pour un module composé* M, *il n'existe de racines primitives, c'est-à-dire de nombres appartenant à l'exposant* $\varphi(\mathrm{M})$, *que dans les deux cas suivants :*

$$\mathrm{M} = p^m, \quad p \text{ premier et autre que } 2,$$
$$\mathrm{M} = 2p^m, \quad \text{» \quad »}$$

Dans le premier cas, qui est le plus intéressant, on a

$$\varphi(p^m) = p^{m-1}(p-1),$$

et il existe des nombres N appartenant à l'exposant

$$p^{m-k}\delta \qquad (k \geqq 1),$$

δ étant un diviseur de $p-1$; le nombre de ces nombres, supposés inférieurs à p^m, est

$$\varphi(p^{m-k}\delta) \quad \text{ou} \quad \varphi(p^{m-k})\,\varphi(\delta),$$

ou encore

$$k < m, \qquad p^{m-k-1}(p-1)\,\varphi(\delta),$$
$$k = m, \qquad \varphi(\delta);$$

je me propose de donner de ces nombres, pour chaque valeur de k et chaque valeur de δ, *une*

expression plus arithmétique que celle qui résulte de l'emploi d'une racine primitive relative au module p^m.

Je dirai ensuite un mot sur le cas du module $2p^m$, pour lequel on a

$$\varphi(2p^m) = \varphi(p^m).$$

Dans la seconde Partie, je considère le module 2^m, $m \gtreqless 3$, pour lequel il n'y a pas de racines primitives. Aux exposants 2^{m-2}, 2^{m-3}, ..., 2, appartiennent des nombres dont le nombre est

$$2\varphi(2^{m-2}),\ 2\varphi(2^{m-3}),\ \ldots,\ 2\varphi(2);$$

restent les deux nombres 1 et $2^m - 1$ qui appartiennent respectivement aux exposants 1 et 2.

PREMIÈRE PARTIE.

MODULES DE LA FORME p^m, p ÉTANT IMPAIR.

I.

Nous chercherons d'abord à quel exposant appartient un nombre donné N, relativement au module p^m.

2. **Lemme.** — *Soit un nombre* H, *pour lequel on a, avec* $h \gtreqless 1$,

$$\begin{cases} H - 1 = p^h q' & (p \gtreqless 3) \\ (q' \text{ non multiple de } p); \end{cases}$$

on a aussi

$$\begin{cases} H^{p^{m-h}} - 1 = p^m q \\ (q \text{ non multiple de } p). \end{cases}$$

Ces deux faits (l'un positif, l'autre négatif) ayant lieu par hypothèse pour $m = h$, il suffira de montrer

que, s'ils ont lieu pour une valeur de m, ils ont lieu pour la valeur immédiatement supérieure.

Écrivons

$$H^{p^{m-h}} = p^m q + 1,$$

q ne renfermant pas le facteur p, et élevons les deux membres à la puissance p. Comme les coefficients du binome, pour un exposant premier p, sont multiples de p, sauf le premier et le dernier qui ont la valeur 1 ([1]), on a

$$\begin{aligned} H^{p^{m+1-h}} = \; & p^{pm} && q^p \\ & + p^{(p-1)m+1} && q^{p-1} \\ & + p^{(p-2)m+1} && q^{p-2} A \\ & + \dots \\ & + p^{2m+1} && q^2 L \\ & + p^{m+1} && q \\ & + 1, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$H^{p^{m+1-h}} - 1 = p^{m+1} Q;$$

ainsi le premier membre est divisible par p^{m+1}.

En outre, Q ne renferme pas le facteur p ; on a en effet le diviseur qui donne le quotient, Q étant p^{m+1},

$$\begin{aligned} Q = \; & p^{(p-1)m-1} && q^p \\ & + p^{(p-2)m} && q^{p-1} \\ & + p^{(p-3)m} && q^{p-2} A \\ & + \dots \\ & + p^m && q^2 L \\ & + && q. \end{aligned}$$

([1]) Un fait analogue a lieu pour la formule qui donne la puissance $p^{\text{ième}}$ d'un polynome, et cela donne une démonstration du théorème de Fermat. (*Voir* CAHEN, *Éléments de la Théorie des nombres*, p. 66 ; nous indiquerons les renvois à cet Ouvrage par la notation C, p. 66.)

et la partie qui précède q est multiple de p, même dans le cas le plus défavorable, $p = 3$, où cette partie est

$$p^{2m-1} q^3 + p^m q^2,$$

m étant au moins 1. Comme l'égalité ci-dessus en H n'est pas autre chose que l'égalité primitive avec $m+1$ au lieu de m, comme de plus le quotient Q a la propriété du quotient q, le fait annoncé est établi.

3. **Théorème.** — *Soit p un nombre premier autre que* 2,

$$p \gtreqless 3.$$

Le nombre N *étant premier avec p, si* δ *est l'exposant auquel appartient* N (*ou son résidu n par rapport à p*) *pour le module p, et si la plus haute puissance de p qui divise* $N^\delta - 1$ *est* p^h, *avec* $h \gtreqless 1$, *l'exposant auquel appartient* N *relativement au module* p^m *est*

$$p^{m-h}\delta,$$

tant qu'on a $h \leqq m$.

On a, par hypothèse, avec $h \gtreqless 1$,

$$(1) \qquad \begin{cases} N^\delta - 1 = p^h q' \\ (q' \text{ non multiple de } p); \end{cases}$$

on a en outre

$$(2) \qquad N^\delta - 1 = \dot{p} \qquad (\delta \text{ minimum});$$

la conclusion est, avec $m \gtreqless h$,

$$(3) \qquad N^{p^{m-h}\delta} - 1 = p^m q \qquad (\text{exposant minimum pour N}).$$

1° D'après (2), les seules puissances de N qui, divisées par p, donnent 1 pour reste, sont celles dont l'exposant est multiple de δ; l'exposant auquel appartient N, pour le module p^m, est donc d'abord multiple de δ.

2° D'après (1), en appliquant le lemme du n° 2 avec $H = N^{\delta}$, on a

$$\begin{cases} N^{p^{m-h}\delta} - 1 = p^m q \\ (q \text{ non multiple de } p); \end{cases}$$

l'exposant auquel appartient N, pour le module p^m, est donc $p^{m-h}\delta$, ou un diviseur de ce nombre ; comme cet exposant doit être multiple de δ, qui est un diviseur de $p-1$, il est certainement de la forme $p^{l-h}\delta$, avec $l \leq m$.

Or, avec l'hypothèse (1), on a

$$\begin{cases} N^{p^{l-h}\delta} - 1 = p^l q \\ (q \text{ non multiple de } p); \end{cases}$$

donc le premier membre n'est divisible par p^m que si l'on a $l = m$. Le nombre N appartient donc bien à l'exposant $p^{m-h}\delta$, comme l'indique l'écriture (3).

On peut observer que le quotient q de l'égalité (3) *ne renferme plus le facteur p.* L'énoncé même du théorème entraîne d'ailleurs cette conséquence ; sans quoi N appartiendrait pour le module p^{m+i} à un exposant diviseur de $p^{m-h}\delta$, ce qui est contraire au théorème.

4. **Remarque.** — Si l'on a $h > m$, l'exposant auquel appartient N est simplement δ, puisqu'on a, d'après (1),

$$N^{\delta} - 1 = p^m \times p^{h-m} q',$$

et que, d'ailleurs, cet exposant doit renfermer le facteur δ ; le quotient $p^{h-m}q'$ renferme alors le facteur p.

(La même chose a déjà lieu pour $h = m$, si ce n'est que le quotient est alors q' non multiple de p.)

II.

Voyons maintenant, ce qui est l'objet principal de ce Mémoire, quels nombres N appartiennent à un exposant donné $p^{m-k}\delta$, k étant au moins 1, et δ étant un diviseur de $p-1$. Pour

$$k=1, 2, \ldots, h, \ldots, m-1,$$

on doit chercher les nombres qui satisfont à la fois aux conditions (1) et (2), δ et h étant donnés. Pour $k=m$, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit des nombres N qui appartiennent simplement à l'exposant δ, on aura à tenir compte de la remarque du n° 4.

Nous commencerons par résoudre, et c'est l'objet de ce paragraphe, un problème plus général que celui que nous avons en vue.

5. Problème I. — *Résoudre la congruence*

$$N^s = \mathfrak{N} + \dot{p}^{h+1},$$

l'exposant s n'étant pas multiple de p ; le point indique un multiple de p^{h+1}.

Supposons connus les $h+1$ derniers chiffres de $\mathfrak{N}$ écrit en base p, et cherchons les $h+1$ derniers chiffres de N écrit de même [1] ; on veut avoir

$$\begin{aligned}(n + ap + bp^2 + \ldots + ep^{h-1} + fp^h + \dot{p}^{h+1})^s \\ = \nu + \alpha p + \beta p^2 + \ldots + \varepsilon p^{h-1} + \varphi p^h + \dot{p}^{h+1};\end{aligned}$$

---

[1] Dans le traitement des questions où le module est une puissance de p, on procède de proche en proche à partir du module premier p, en faisant croître d'une unité à chaque fois l'exposant de la puissance (C. p. 99) ; on comprend dès lors que l'emploi du système de numération à base p doit donner aux démonstrations un tour aisé.

nous supposerons $\mathfrak{N}$ non multiple de p, c'est-à-dire

$$\nu \neq 0, \qquad \text{d'où} \qquad n \neq 0.$$

On doit avoir d'abord

$$n^s = \nu + \dot{p} \qquad (n < p);$$

ν *doit donc être un reste de puissance* $s^{ième}$ *par rapport au module* p, et la condition pour qu'il en soit ainsi est celle-ci : δ désignant le plus grand commun diviseur entre s et $p-1$, ν doit être l'une des $\frac{p-1}{\delta}$ solutions de la congruence

$$\nu^{\frac{p-1}{\delta}} = 1 + \dot{p};$$

cette condition remplie, la congruence ci-dessus en n a δ solutions distinctes (C, p. 99). Dans le cas particulier

$$\nu = 1,$$

que nous aurons à considérer, ces δ solutions sont, comme on sait, celles de la congruence

$$n^{\delta} = 1 + \dot{p} \qquad (n < p).$$

La valeur de n étant choisie, on doit avoir en second lieu

$$(n + ap)^s = \nu + \alpha p + \dot{p}^2,$$

ou

$$(n^s - \nu) + s n^{s-1} ap - \alpha p = \dot{p}^2,$$

ou

$$\frac{n^s - \nu}{p} + s n^{s-1} a - \alpha = \dot{p} \qquad (\alpha < p);$$

on a supposé s non multiple de p pour que le coefficient de l'inconnue a soit premier avec le module p,

et la congruence a alors une solution, soit a [1].

On doit avoir ensuite

$$(n + ap + bp^2)^s = \nu + \alpha p + \beta p^2 + \dot{p}^3,$$

ou

$$[(n + ap)^s - (\nu + \alpha p)] + s(n + ap)^{s-1} bp^2 - \beta p^2 = \dot{p}^3,$$

on divise par p^2, etc. [2].

On continue ainsi de proche en proche.

6. **Problème II.** — *L'exposant s n'étant pas multiple de p, trouver* N *d'après les conditions*

$$\begin{cases} N^s - \nu = p^h q' \\ (q' \text{ non multiple de } p), \end{cases}$$

où ν est un reste de puissance $s^{ième}$ par rapport au module p.

Il faut, dans ce qui précède, faire

$$\begin{cases} \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \ldots, \quad \varepsilon = 0 \\ (\varphi \gtrless 0). \end{cases}$$

La valeur de n étant choisie, si l'on désigne par a_0,

---

(1) Si s est multiple de p, on a

$$(n + \dot{p})^s = n^s + \dot{p}^2;$$

la congruence à résoudre est impossible ou indéterminée selon qu'on n'a pas ou qu'on a

$$n^s = \nu + \alpha p + \dot{p}^2.$$

(2) Si s est multiple de p, on a

$$(n + ap + \dot{p}^2)^s = (n + ap)^s + \dot{p}^3;$$

la congruence à résoudre est impossible ou indéterminée selon qu'on n'a pas ou qu'on a

$$(n + ap)^s = \nu + \alpha p + \beta p^2 + \dot{p}^3.$$

$b_0, \ldots, e_0, f_0$ les valeurs de $a, b, \ldots, e, f$, pour α, $\beta, \ldots, \varepsilon, \varphi$ égaux à zéro, il faut prendre (puisque φ ne doit pas être nul)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{N} = n + a_0 p + b_0 p^2 + \ldots + e_0 p^{h-1} + f p^h + \dot{p}^{h+1} \\ \qquad\qquad (f \neq f_0). \end{array} \right.$$

Le nombre des valeurs de n est δ, le nombre des valeurs de f est $p - 1$; à chacune de ces valeurs de f correspond pour φ l'une des valeurs $1, 2, 3, \ldots, p-1$, dans l'égalité

$$\mathrm{N}^s - \nu = p^h(\dot{p} + \varphi).$$

Pour une même valeur de n, les nombres N forment $p - 1$ progressions arithmétiques de raison p^{h+1}.

7. **Cas particulier.** — *L'exposant s n'étant pas multiple de p, trouver* N *d'après les conditions*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{N}^s - 1 = p^h q' \\ (q' \text{ non multiple de } p). \end{array} \right.$$

Si l'on désigne toujours par δ le plus grand commun diviseur entre s et $p - 1$, les valeurs de N sont celles qui vérifient les conditions plus simples :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{N}^\delta - 1 = p^h q' \\ (q' \text{ non multiple de } p); \end{array} \right.$$

cela donne

$$(1') \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{N} = n + a_0 p + b_0 p^2 + \ldots + e_0 p^{h-1} + f p^h + \dot{p}^{h+1} \\ \qquad\qquad (f \neq f_0); \end{array} \right.$$

n est l'une des δ solutions de la congruence

$$n^\delta - 1 = \dot{p},$$

et, lorsque la valeur de n a été choisie, les coeffi-

cients a_0, b_0, ..., e_0 sont absolument déterminés, le nombre des valeurs de f est $p-1$. En effet, d'une part les valeurs de N qui satisfont aux conditions (1) satisfont aux conditions proposées, et, d'autre part, la réponse au problème primitif est également de la forme (1′) avec δ valeurs pour n et $p-1$ valeurs pour f; d'ailleurs, en ce qui concerne n, on a déjà rappelé que les congruences

$$n^s - 1 = \dot{p}, \qquad n^\delta - 1 = \dot{p}$$

ont les mêmes solutions (congruences à modules premiers).

III.

8. **Des nombres qui appartiennent à un exposant donné pour un module donné** p^m, $p \gtreqless 3$. — Pour avoir les nombres N qui appartiennent à l'exposant $p^{m-h}\delta$ relativement au module p^m, δ étant un diviseur de $p-1$, et h ayant l'une des valeurs 1, 2, ..., $m-1$ (mais non la valeur m que nous écartons pour le moment), il faut prendre les nombres N qui vérifient les conditions suivantes :

(1) $$\begin{cases} N^\delta - 1 = p^h q' \\ (q' \text{ non multiple de } p) \end{cases}$$

et

(2) $$N^\delta - 1 = \dot{p} \qquad (\delta \text{ minimum});$$

on supposera d'ailleurs

$$N < p^m.$$

Le nombre N devant ici appartenir à l'exposant δ pour le module p, il doit en être de même de son résidu n par rapport à p, et l'on doit avoir

(2′) $$n^\delta - 1 = \dot{p} \qquad (\delta \text{ minimum}).$$

Le nombre des valeurs de n pour la formule (1′) est alors seulement $\varphi(\delta)$; comme, dans cette formule,

$$(1') \left\{ \begin{array}{c} N = n + a_0 p + b_0 p^2 + \ldots + e_0 p^{h-1} + f p^h + \dot{p}^{h+1} \\ (f \neq f_0), \end{array} \right.$$

le coefficient f a $p - 1$ valeurs, les nombres demandés N forment $(p-1)\varphi(\delta)$ progressions arithmétiques de raison p^{h+1}, et chacune de ces progressions doit être limitée par la condition $N < p^m$. On peut écrire

$$N = N' + p^{h+1} \times (0, 1, 2, \ldots, p^{m-1-h} - 1),$$

avec $N' < p^{h+1}$. Comme on a pour n des valeurs en nombre $\varphi(\delta)$, pour f des valeurs en nombre $p - 1$, pour le multiplicateur de p^{h+1} des valeurs en nombre p^{m-h-1}, le nombre des valeurs de N qu'on obtient est

$$\varphi(\delta) \times (p-1) \times p^{m-h-1} \quad \text{ou} \quad \varphi(p^{m-h}\delta),$$

comme on le sait par ailleurs.

Pour $h = m - 1$, on arrive à prendre

$$\left\{ \begin{array}{c} N = n + a_0 p + b_0 p^2 + \ldots + r_0 p^{m-2} + s p^{m-1} \\ (s \neq s_0). \end{array} \right.$$

Si l'on prend enfin

$$N = n + a_0 p + b_0 p^2 + \ldots + r_0 p^{m-2} + s_0 p^{m-1},$$

on a

$$N^\delta - 1 = \dot{p}^m,$$

le quotient pouvant renfermer le facteur p, et N appartient à l'exposant δ pour le module p^m. On a pour N des valeurs en nombre $\varphi(\delta)$. On peut dire qu'on a ici $h \geqq m$; le quotient de $N^\delta - 1$ par p^m renferme le facteur p à la puissance $h - m$, si h est plus grand que m.

Dans tous les cas, les nombres N (plus petits que p^m) qui appartiennent à l'exposant $p^{m-k}\delta$ pour le module p^m sont en nombre

$$\varphi(p^{m-k}\delta).$$

9. Prenons, par exemple, $p = 7$. Pour des valeurs données de δ et de h, les nombres N qui satisfont aux conditions (1) et (2) forment $6\varphi(\delta)$ progressions arithmétiques illimitées (*voir* le Tableau de la page 205).

Cela étant, si le module est, par exemple, 7^4, les nombres de la double colonne qui a pour titre $\delta = 3$ appartiennent successivement aux exposants $7^3 \times 3$, $7^2 \times 3$, 7×3, et la suite de la colonne ($h \geqq 4$) donne une progression unique de nombres appartenant à l'exposant 3. Si l'on se borne aux nombres plus petits que 7^4, les progressions renferment successivement 7^2 termes, 7 termes, 1 terme, et encore 1 terme; de sorte que, dans la colonne qui correspond à $\delta = 3$, $n = 2$, par exemple, le nombre des éléments est

$$(7^2 + 7 + 1) \times (7 - 1) + 1 \quad \text{ou} \quad 7^3;$$

le nombre total des colonnes étant $7 - 1$, le nombre total des éléments est

$$7^3 \times (7 - 1) \quad \text{ou} \quad \varphi(7^4).$$

10. Pour $\delta = 1$, on veut avoir

$$\left\{ \begin{array}{l} N - 1 = p^h q' \qquad (N - 1 = \dot{p}) \\ \qquad (q' \text{ non multiple de } p), \end{array} \right.$$

c'est-à-dire *a priori*

$$N = p^h \times (1, 2, 3, \ldots, p - 1) + 1 + \dot{p}^{h+1},$$

avec $f \neq 0$.

	$\delta = 1.$	$\delta = 2.$	$\delta = 3.$		$\delta = 6.$	
	$n = 1.$	$n = 6.$	$n = 2.$	$n = 4.$	$n = 5.$	$n = 3.$
$h = 1.$		$N = 6 + \dot{7}^2$	$N = 2 + \dot{7}^2$	$N = 4 + 7^2$	$N = 5 + \dot{7}^2$	$N = 3 + \dot{7}^2$
	$N = 8 + 7^2$	13	9	11	12	10
	15	20	16			17
	22	27	23	25	26	24
	29	34		32	33	
	36	41	37	39	40	38
	43		44	46	47	45
$h = 2.$		$N = 48 + \dot{7}^3$	$N = 30 + \dot{7}^3$		$N = 31 + \dot{7}^3$	
	$N = 50 + \dot{7}^3$	...	...	$N = 67 + \dot{7}^3$	...	$N = 68 + \dot{7}^3$
	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...

Pour $\delta = 2$, on veut avoir

$$\left\{\begin{array}{l} N^2 - 1 = p^h q' \qquad (N + 1 = \dot{p}) \\ \qquad (q' \text{ non multiple de } p), \end{array}\right.$$

c'est-à-dire *a priori*

$$N = p^h \times (1, 2, 3, \ldots, p-1) - 1 + \dot{p}^{h+1},$$

avec $f \neq 0$; cette écriture correspond à $n = -1$, et, si l'on veut conserver $n = p - 1$, il faut écrire

$$\begin{aligned} N = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \ldots \\ + (p-1)p^{h-1} + p^h \times (0, 1, 2, \ldots, p-2) + \dot{p}^{h+1}, \end{aligned}$$

avec $f \neq p - 1$.

Si l'on suppose, par exemple, $p = 3$, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{l} N^{\delta} - 1 = 3^h q' \\ (q' \text{ non multiple de } 3), \end{array}\right.$$

on peut avoir seulement $\delta = 1$, ou $\delta = 2$, ce qui donne d'abord

$$N = \dot{3} + 1$$

ou

$$N = \dot{3} - 1.$$

Pour $h = 1$, on a donc (avec $n = \pm 1$)

$$N = \pm 1 + 3(1, 2) + \dot{9}.$$

Restent les nombres N des deux formes $9\lambda \pm 1$; prenant d'abord λ non multiple de 3, on a

$$N = \pm 1 + 9(1, 2) + \dot{27},$$

et ces nombres correspondent à $h = 2$. Restent les nombres N des deux formes $27\lambda \pm 1$, etc.

11. Remarque générale pour le cas où δ est pair. — Si δ est pair, $\delta = 2d$, les conditions (1) et (2) du n° 8 sont équivalentes à celles-ci :

[1] $$\begin{cases} N^d + 1 = p^h q' \\ (q' \text{ non multiple de } p), \end{cases}$$

[2] $$N^d + 1 = \dot{p} \qquad (d \text{ minimum});$$

en effet, $N^d - 1$ n'est pas divisible par p, de sorte que $N^d + 1$ doit être divisible par p^h.

On a ici $\nu = -1$, et la condition

$$(-1)^{\frac{p-1}{d}} = 1 + \dot{p},$$

qui exprime que -1 est un reste de puissance $d^{\text{ième}}$ par rapport au module p, est naturellement satisfaite, $p - 1$ étant multiple de $2d$. La congruence

$$n^d + 1 = \dot{p}$$

donne d valeurs de n, et, parmi ces valeurs, celles pour lesquelles l'exposant d est minimum sont en nombre $\varphi(\delta)$, ou $\varphi(2d)$, c'est-à-dire $2\varphi(d)$ ou $\varphi(d)$ selon que d est pair ou impair. Dans ce dernier cas, par exemple, les solutions de la congruence considérée sont les compléments à p des solutions de la congruence

$$n^d - 1 = \dot{p},$$

et la valeur $\varphi(d)$ est intuitive (*voir* $\delta = 6$ dans le Tableau relatif à $p = 7$); voici un exemple du premier cas :

$$p = 5, \qquad \delta = 4, \qquad d = 2$$

donnent, avec $\varphi(d) = 1$, $2\varphi(d) = 2$,

$$2^2 + 1 = 5, \qquad 3^2 + 1 = 10.$$

On a un lemme analogue à celui qui a été démontré au n° 2, avec $+1$ au lieu de -1.

Pour le théorème, il faut mettre $+1$ au lieu de -1 dans les hypothèses (1) et (2) et dans la conclusion (3).

Les nombres qui appartiennent à l'exposant $p^{m-h}\delta$ pour le module p^m, lorsque δ est pair, $\delta = 2d$, sont ceux pour lesquels on a

$$N^{p^{m-h}d} + 1 = \dot{p}^m \quad (\text{exposant minimum pour } N);$$

ils sont en nombre

$$\varphi(2d) \times \varphi(p^{m-h}) \qquad \text{ou} \qquad \varphi(p^{m-h}\delta).$$

12. **Restes des puissances des nombres N.** — Soit N un nombre qui vérifie les conditions (1) et (2); il appartient, pour le module p^m, à l'exposant $p^{m-h}\delta$, et, dans la suite des restes fournis par la progression

$$1, \quad N, \quad N^2, \quad \ldots, \quad N^{\delta-1}, \quad \ldots,$$

le diviseur étant p^m, les $p^{m-h}\delta$ premiers restes sont distincts. Soit R un des δ premiers restes. On a

$$R \times N^{\delta} = R \times (1 + p^h q') = R + \dot{p}^h;$$

il en résulte que *les restes, pris de δ en δ à partir de* R, *sont les résidus par rapport à p^m des nombres*

$$R + p^h \times (0, 1, 2, 3, \ldots, p^{m-h} - 1),$$

en nombre p^{m-h}.

Si δ est pair, $\delta = 2d$, on a

$$R \times N^d = R \times (-1 + p^h q') = -R + \dot{p}^h;$$

les restes, pris de d en d, sont alternativement les résidus par rapport à p^m des nombres des deux groupes

$$\pm R + p^h \times (0, 1, 2, 3, \ldots, p^{m-h} - 1).$$

Pour $\delta = 1$, $\delta = 2$, les choses sont particulièrement simples.

IV.

13. **Module** $2p^m (p \geqq 3)$. — Pour le problème I :

$$N^s = \mathfrak{N} + 2\dot{p}^{h+1},$$

il suffira qu'on ait

$$N^s = \mathfrak{N} + \dot{p}^{h+1},$$

N *étant de même parité que* $\mathfrak{N}$. Comme on a alors

$$N = (n + ap + bp^2 + \ldots + ep^{h-1} + fp^h) + kp^{h+1},$$

on prendra k pair ou impair selon les circonstances.

Pour le problème II :

$$\left\{ \begin{array}{c} N^s - \nu = 2p^h q' \\ (q' \text{ non multiple de } p), \end{array} \right.$$

on procédera d'une manière analogue.

Relativement aux nombres qui appartiennent à un exposant donné $p^{m-h}\delta$ pour le module $2p^m$, tant que h n'est pas m, on doit prendre

$$N = N' + p^{h+1} \times (1, 3, 5, \ldots, 2p^{m-1-h} - 1),$$

si N′ est de parité contraire à $\mathfrak{N}$, et

$$N = N' + p^{h+1} \times (0, 2, 4, \ldots, 2p^{m-1-h} - 2),$$

si N′ est de même parité que $\mathfrak{N}$; le nombre de ces nombres est, dans les deux cas,

$$\varphi(\delta) \times (p - 1) \times p^{m-h-1}$$

ou

$$\varphi(p^{m-h}\delta).$$

Pour un exposant δ on prendra

$$N = n + a_0 p + b_0 p^2 + \ldots + s_0 p^{m-1} + p^m \times (0 \text{ ou } 1),$$

de façon que N soit de même parité que $\mathfrak{N}$.

DEUXIÈME PARTIE.

MODULE 2^m, $m \geqq 3$.

14. **Lemme.** — *Soit* N *un nombre impair pour lequel on a*

$$(4) \quad \begin{cases} N - 1 = 2^h q' \quad \text{ou} \quad N + 1 = 2^h q' \quad (h \geqq 2) \\ (q' \text{ impair}); \end{cases}$$

on a alors

$$(5) \quad \begin{cases} N^{2^{m-h}} - 1 = 2^m q \quad (m > h) \\ (q \text{ impair}). \end{cases}$$

Pour $m = h + 1$, on doit avoir d'abord

$$N^2 - 1 = 2^{h+1} q \qquad (q \text{ impair});$$

or, on a, par hypothèse,

$$N = 2^h q' \pm 1 \qquad (q' \text{ impair}),$$

d'où

$$N^2 = 2^{2h} q'^2 \pm 2^{h+1} q' + 1,$$

ou

$$N^2 - 1 = 2^{h+1} q' (2^{h-1} q' \pm 1);$$

pour $h \geqq 2$, on a bien ce qu'on cherche.

D'autre part, supposons qu'on ait obtenu pour une certaine valeur de m

$$(a) \qquad N^{2^{m-h}} = 2^m q + 1 \qquad (q \text{ impair});$$

on a, par élévation au carré,

$$N^{2^{m+1-h}} = 2^{2m} q^2 + 2^{m+1} q + 1$$

ou

$$(b) \qquad N^{2^{m+1-h}} - 1 = 2^{m+1} q (2^{m-1} q + 1);$$

avec $m > 1$, (b) n'est autre chose que (a) où l'on remplace m par $m+1$.

Le fait énoncé est donc exact.

15. **Théorème**. — *Un nombre impair étant mis sous la forme* (4), *ou encore sous la forme*

$$(6) \qquad N = (2^h \pm 1) + 2^{h+1} \qquad (h \geqq 2),$$

ce qui est toujours possible d'une seule façon, l'exposant auquel appartient ce nombre pour le module 2^m *est* 2^{m-h}, *tant qu'on a* $h < m$.

Même démonstration que pour le théorème analogue de la première Partie. *On peut observer que le quotient* q *de l'égalité* (5) *est impair.*

Je réunis ici les conditions d'inégalité

$$2 \leqq h \leqq m - 1.$$

16. **Remarque**. — Lorsqu'on a $h \geqq m$, le nombre N appartient à l'exposant 1 ou à l'exposant 2 selon qu'on a

$$N = 2^h q' + 1 \qquad \text{ou} \qquad N = 2^h q' - 1.$$

17. **Des nombres qui appartiennent à un exposant donné pour le module 2^m, $m \geqq 3$.** — Le module 2^m étant donné, les nombres de la forme (6), avec $h \leqq m - 1$, appartiennent à l'exposant 2^{m-h}, qui prend les valeurs

$$2^{m-2}, \quad 2^{m-3}, \quad \ldots, \quad 2^2, \quad 2;$$

pour chaque exposant, ces nombres forment *deux* pro-

gressions arithmétiques. *Les nombres des deux formes*

$$\dot{2^m} + 1, \quad 2^m - 1$$

appartiennent respectivement aux exposants 1 *et* 2. Si l'on se borne aux nombres inférieurs à 2^m, les nombres considérés sont en nombre

$$2[\varphi(2^{m-2}) + \varphi(2^{m-3}) + \ldots + \varphi(2) + 1],$$
$$\text{ou} \quad 2^{m-1}, \qquad \text{ou} \quad \varphi(2^m).$$

Le module étant 16, par exemple, on a pour l'exposant 4 les nombres 3, 11 et 5, 13; pour l'exposant 2 les nombres 7 et 9, et en outre le nombre 15; pour l'exposant 1, le nombre 1.

18. Prenons la formule (6).

1° Pour $h = 2$, on a les nombres des deux formes

$$N = \dot{8} - 5 \quad \text{ou} \quad \dot{8} + 3$$

qui appartiennent à l'exposant 2^{m-2} (quotient du module par 4, ou moitié de l'indicateur du module; pas de racines primitives).

2° Restent les nombres des deux formes $8\lambda \pm 1$. Prenant d'abord λ impair, on a

$$N = \dot{16} + 9 \quad \text{ou} \quad \dot{16} - 7.$$

Or, en faisant $h = 3$ (ce qui suppose $m \gtreqless 4$), on voit que tout nombre de l'une de ces formes appartient à l'exposant 2^{m-3} (quotient du module par 8).

3° Restent les nombres des deux formes $16\lambda \pm 1$. Prenant d'abord λ impair, on a

$$N = \dot{32} + 17 \quad \text{ou} \quad \dot{32} + 15.$$

Or, en faisant $h = 4$ (ce qui suppose $m \gtreqless 5$), on voit

que tout nombre de l'une de ces formes appartient à l'exposant 2^{m-4}.

En continuant ainsi, après avoir fait $h = m - 1$, ce qui donne des nombres appartenant à l'exposant 2, il restera les nombres des deux formes $2^m\lambda \pm 1$, qui appartiennent respectivement aux exposants 1 et 2.

19. Nous donnerons encore, en commençant par les exposants les plus faibles et en nous bornant aux nombres inférieurs à 2^m, le Tableau suivant :

Exposant.	Nombres.
1	1
2	2^{m-1}
2	$(2^{m-1} \pm 1)$
2^2	$(2^{m-2} \pm 1) + 2^{m-1} \times (0, 1)$
2^3	$(2^{m-3} \pm 1) + 2^{m-2} \times (0, 1, 2, 3)$
..	....
2^{m-h}	$(2^h \pm 1) + 2^{h+1} \times (0, 1, 2, \ldots, 2^{m-h-1} - 1)$
.....	....
2^{m-2}	$(2^2 \pm 1) + 2^3 \times (0, 1, 2, \ldots, 2^{m-3} - 1)$

Par exemple, avec le module 2^6 ou 64, on peut former comme il suit le Tableau des nombres autres que 1 et 63, avec l'exposant en indice :

			$(31, 33)_2$			
	$(15, 17)_4$		$(31, 33)_2$		$(47, 49)_4$	
$(7, 9)_8$	$(15, 17)_4$	$(23, 25)_8$	$(31, 33)_2$	$(39, 41)_8$	$(47, 49)_4$	$(55, 57)_8$

une dernière ligne, non écrite faute de place, commencerait par $(3, 5)_{16}$ et finirait par $(59, 61)_{16}$.

20. **Restes des puissances des nombres N.** — *Pour les nombres de la forme*

$$N = (2^h + 1) + 2^{h+1},$$

lesquels appartiennent à l'exposant 2^{m-h}, les restes des puissances par rapport au module 2^m sont

$$2^h \times (0, 1, 2, \ldots 2^{m-h} - 1) + 1.$$

Soit

$$N^t = 2^m Q + R,$$
$$N^t - 1 = 2^m Q + (R - 1);$$

le premier membre est divisible par $N - 1$, donc par 2^h, ...

Pour les nombres de la forme

$$N = (2^h - 1) + 2^{h+1},$$

lesquels appartiennent aussi à l'exposant 2^{m-h}, les restes des puissances par rapport au module 2^m sont, pour les puissances paires de N,

$$2^{h+1} \times (0, 1, 2, \ldots, 2^{m-h-1} - 1) + 1,$$

et pour les puissances impaires

$$2^{h+1} \times (0, 1, 2, \ldots, 2^{m-h-1} - 1) + (2^h - 1).$$

Soit

$$N^t = 2^m Q + R,$$
$$N^t - 1 = 2^m Q + (R - 1), \qquad N^t + 1 = 2^m Q + (R + 1).$$

Si t est pair, $N^t - 1$ est divisible par $(N + 1)(N - 1)$, donc par 2^{h+1}, ...

Si t est impair, $N^t + 1$ est divisible par $N + 1$, donc par 2^h; le quotient

$$(N^{t-1} - N^{t-2}) + \ldots + (N^2 - N) + 1$$

est impair, et l'on a

$$R = 2^h(2q + 1) - 1 = 2^{h+1} q + (2^h - 1);$$

etc.

21. Les derniers chiffres des puissances de 5 écrites en base 10. — Je terminerai par une remarque pour laquelle je me bornerai à un exemple. On a

$$5 - 1 = 2^2 q'$$

et, par suite,

$$5^{2^{m-2}} - 1 = \dot{2}^m q;$$

on a donc

$$5^m(5^{2^{m-2}} - 1) = \dot{10}^m$$

ou

$$5^{m+2^{m-2}} - 5^m = \dot{10}^m.$$

Donc, *si l'on écrit les puissances de* 5 *dans le système de numération dont la base est* 10, *à partir de* $5^m (m \geqq 2)$, *les* m *derniers chiffres se reproduisent périodiquement, le nombre des termes de la période étant* 2^{m-2}.

Si l'on fait le calcul des puissances successives de 5, on trouve ceci :

1° Ces puissances, à partir de 5^2, se terminent toutes par 25;

2° A partir de 5^3, elles se terminent alternativement par 125 et 625;

3° A partir de 5^4, elles se terminent périodiquement par 0625, 3125, 5625, 8125;

Etc.

22. Modules 4 et 2. — Relativement au module 2, on a supposé $m \geqq 3$. Pour le module 2^2, les impairs étant de l'une des deux formes $4\lambda \pm 1$, ceux qui correspondent au signe + appartiennent à l'exposant 1, ceux qui correspondent au signe — appartiennent à l'exposant 2; on observera que le module composé 4 admet

la racine primitive 3 :

Puissances.....	1	3	9	...
Restes.........	1	3	1	...

Pour le module 2, tous les impairs appartiennent à l'exposant 1.

[I11a]

GÉNÉRALISATION D'UNE QUESTION DE WOLSTENHOLME;

PAR M. SAMUEL CERVERA,
Capitaine au 28e de ligne, Tarragone (Espagne).

M. C.-A. Laisant a proposé, dans son *Recueil de Problèmes de Mathématiques* (p. 18), la question suivante, déjà résolue dans les *Nouvelles Annales*:

Si x, y, z sont trois nombres positifs dont la somme est égale à l'unité, on a

$$(1-x)(1-y)(1-z) > 8xyz \text{ (1)}.$$

Cette proposition n'est qu'un cas particulier du théorème suivant :

Si $x, y, z, \ldots, v$ sont m nombres positifs dont la somme est égale à l'unité, on a

$$(1-x)(1-y)(1-z)\ldots(1-v) > (m-1)^m xyz\ldots v.$$

(1) WOLSTENHOLME, *Nouvelles Annales*, 1554.

Démonstration. — En effet

$$(m-1)^m xyz \ldots v = (m-1)x\,(m-1)y\,(m-1)z \ldots (m-1)v.$$

$$(m-1)x + (m-1)y + \ldots + (m-1)v$$
$$= (m-1)(x+y+z+\ldots+v) = m-1$$

et

$$(1-x)+(1-y)+(1-z)+\ldots+(1-v)$$
$$= m-(x+y+z+\ldots+v) = m-1.$$

Par la théorie des maxima et des minima, on sait que si nous décomposons le nombre $(m-1)$ en m de ses parties, et si nous multiplions celles-ci entre elles, elles nous donneront un produit maximum, quand leurs facteurs seront égaux à la $\frac{1}{m}$ partie de $(m-1)$; et, dès lors, des deux produits

$$(1-x)(1-y)(1-z)\ldots(1-v),$$
$$(m-1)x\,(m-1)y\,(m-1)z\ldots(m-1)v,$$

qui ont m facteurs et dont la somme est $(m-1)$, le majeur des deux sera celui dont les facteurs m seront moins inégaux, puisque le produit le plus grand correspondrait au cas où ils seraient égaux à la $\frac{1}{m}$ partie de la somme $(m-1)$.

Les différences entre ces facteurs pris de deux en deux sont :

Pour le premier produit

$$(1-x)-(1-y) = y-x,$$
$$(1-x)-(1-z) = z-x,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$(1-y)-(1-x) = x-y,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$(1-v)-(1-x) = x-v,$$
$$(1-v)-(1-y) = y-v,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

Pour le second produit

$$(m-1)y-(m-1)x=(m-1)(y-x),$$
$$(m-1)z-(m-1)x=(m-1)(z-x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(m-1)x-(m-1)y=(m-1)(x-y),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(m-1)x-(m-1)v=(m-1)(x-v),$$
$$(m-1)y-(m-1)v=(m-1)(y-v).$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ceci nous démontre que les différences $(y-x)$, $(z-x)$, ... sont précisément $m-1$ autant de fois plus petites que les différences $(m-1)\ (y-x)$, $(m-1)\ (z-v)$, ...

D'où il s'ensuit :

$$(1-x)(1-y)(1-2)\ldots(1-v)$$
$$>(m-1)x(m-1)y(m-1)2\ldots(m-1)v$$

ou

$$(1-x)(1-y)(1-z)\ldots(1-v)>(m-1)^m xyz\ldots v,$$

précisément ce que nous voulions démontrer.

Corollaire. — *Si* $x=y=z=\ldots=v$ *sont* m *nombres positifs égaux à la* $\frac{1}{m}$ *partie de l'unité, on a*

$$(1-x)^m=(m-1)^m x^m,$$

puisque les différences

$$y-x=0=(m-1)(y-x)\ \ldots,$$

les produits

$$(1-x)(1-x)\ldots(1-x)=(1-x)^m,$$
$$(m-1)x(m-1)x\ldots(m-1)x=(m-1)^m x^m$$

seront égaux.

Remarquez aussi que

$$1 - x = 1 - \frac{1}{m} = \frac{m-1}{m} = (m-1)\frac{1}{m} = (m-1)x,$$

ce qui prouve que

$$(1-x)^m = (m-1)^m x^m.$$

Si $m = 1$, on a

$$x = 1, \ldots, 1 - x = 0\,x \qquad \text{(corollaire)}.$$

Remarque :

Si $m = 2$, on a

$$x + y = 1, \ldots, (1-x)(1-y) > 1^2 xy \qquad \text{(théorème)},$$
$$(1-x)(1-y) > xy.$$

Si $m = 2$, $x = y$, on a

$$2x = 1,\ x = \frac{1}{2},\ \ldots, (1-x)^2 = x^2, \ldots, \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Si $m = 3$, on a

$$x + y + z = 1, \ldots, (1-x)(1-y)(1-z) > 2^3 xyz = 8xyz \text{ (1)}.$$

Si $m = 4$, on a

$$(1-x)(1-y)(1-z)(1-s) > 81\,xyzs.$$

Etc.

Exemple :

$$0{,}35 + 0{,}25 + 0{,}40 = 1. \left\{ \begin{array}{l} 1 - 0{,}35 = 0{,}65 \\ 1 - 0{,}25 = 0{,}75 \\ 1 - 0{,}40 = 0{,}60 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (0{,}35 . 0{,}25 . 0{,}40) \times 8 & \\ \quad = (2 . 0{,}35)(2 . 0{,}25)(2 . 0{,}40) = 0{,}28 & \\ 0{,}65 . 0{,}75 . 0{,}60 & = 0{,}2925 \end{array} \right\} \quad 0{,}2925 > 0{,}28.$$

---

(1) Wolstenholme, *Nouvelles Annales*, 1554.

Remarque :

$$\left.\begin{array}{l} 0,75 - 0,65 = 0,10, \quad \ldots \quad 2(0,35) - 2(0,25) = 0,20 = 2(0,10) \\ 0,75 - 0,60 = 0,15, \quad \ldots, \quad 2(0,40) - 2(0,25) = 0,30 = 2(0,15) \\ 0,65 - 0,60 = 0,05, \quad \ldots, \quad 2(0,40) - 2(0,25) = 0,10 = 2(0,05) \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 0,75 - 0,65 + 0,60 = 2. \\ 0,70 + 0,50 - 0,80 = 2. \end{array}\right\}$$

et cependant :

$$0,75 . 0,65 . 0,60 > 0,70 . 0,50 . 0,80 = 2^3 . 0,35 . 0,25 . 0,40.$$

Si $x = y = z$

$$3x = 1, \quad x = \frac{1}{3}, \quad 1 - x = \frac{2}{3} \quad \ldots, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^3, \quad \frac{8}{27} = 8 . \frac{1}{27}.$$

[R7fα]

SUR LA THÉORIE DES PERTURBATIONS DU PENDULE ;

PAR M. LE COMMANDANT P. CHARBONNIER.

(SUITE ET FIN.)

IV. — LA FONCTION PERTURBATRICE DÉPEND DE L'ANGLE.

18. **Formules générales.** — On a, dans l'hypothèse où la fonction φ ne dépend que de l'angle θ, en remplaçant celui-ci par $-\alpha \cos kt$ dans les formules générales du n° 8, les expressions

$$E_s = \int_0^t \varphi(-\alpha \cos kt) \sin kt \, dt,$$

$$E_c = \int_0^t \varphi(-\alpha \cos kt) \cos kt \, dt.$$

1° La première se mettra sous la forme

$$E_s = \frac{1}{k\alpha} \int_{-\alpha}^{\theta} \varphi(\theta) \, d\theta,$$

et cette quadrature, qui est immédiate, montre que $\mathbf{E}_s(\pi)$ ne pourra s'annuler que pour des cas particuliers de la fonction φ [pour $\varphi(\theta)$, fonction impaire, par exemple].

En général $\mathbf{E}_s(\pi)$ n'est pas nul : *l'amplitude de l'oscillation sera, en général, modifiée.*

2° On écrira

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{k^2\alpha}\int_0^\theta \varphi(\theta)\,d\theta',$$

d'où

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{k^2\alpha}\left[\theta'\varphi(\theta) - \int_{-\alpha}^{\theta} \theta'\varphi'(\theta)\,d\theta\right].$$

Le premier terme du crochet s'annule pour $kt = \pi$. La forme du second montre qu'il ne sera nul que dans des cas particuliers de la fonction $\varphi(\theta)$.

En général, $\mathbf{E}_c(\pi)$ ne sera pas nul : *la durée de l'oscillation sera modifiée.*

19. **Fonction monome. Angle.** — Soit $\varphi(\theta)$ supposé sous la forme monome θ^m. On aura

$$\mathbf{E}_s = \frac{(-\alpha)^m}{k}\int^{kt} \cos^m kt \sin kt\, dkt,$$

d'où

$$\mathbf{E}_s = \frac{(-\alpha)^m}{k}\,\frac{1}{m+1}\,(1-\cos^{m+1} kt).$$

Donc, si *m est pair,* lorsqu'on fait $kt = \pi$ et $\cos kt = -1$, on aura

$$\mathbf{E}_s(\pi) = \frac{\alpha^m}{k}\,\frac{2}{m+1}.$$

Si *m est impair,* on aura

$$\mathbf{E}_s(\pi) = 0.$$

L'amplitude de l'oscillation sera donc modifiée si m est pair et conservée si m est impair.

Dans le premier cas, on aura (nº 9, 2º)

$$\Delta\alpha = -\frac{2\varepsilon}{m+1}\frac{\alpha^m}{k^2}.$$

20. **Fonction monome. Durée.** — La fonction $\mathbf{E}_c$ s'écrira

$$\mathbf{E}_c = \frac{(-\alpha)^m}{k}\int_0^{kt}\cos^{m+1}kt\,dkt.$$

Posons

$$\mathrm{J}_m = \int_0^y \cos^{m+1}y\,dy.$$

Comme au nº 15, on établira la formule de récurrence

$$(m+1)\,\mathrm{J}_m = \sin y\cos^m y + m\,\mathrm{J}_{m-2}.$$

Mais

$$\mathrm{J}_{-1} = y \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J}_0 = \sin y.$$

Pour $y = \pi$, on a

$$\mathrm{J}_{-1}(\pi) = \pi \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J}_0(\pi) = 0.$$

Il en résulte que :

Si *m est pair,* on aura $\mathrm{J}_m(\pi) = 0$: *la durée de l'oscillation ne sera pas modifiée;*

Si *m est impair, la durée de l'oscillation sera modifiée.*

Ainsi donc, ou l'*angle* ou la *durée* est modifiée, mais jamais simultanément l'un et l'autre.

Comme on a (nº 15)

$$\mathrm{J}_m(\pi) = \mathrm{I}_n(\pi),$$

on aura

$$\mathrm{J}_m(\pi) = \pi\frac{1.3.5\ldots m}{2.4.6\ldots(m+1)}.$$

Il viendra donc (m impair)

$$\mathbf{E}_c(\pi) = -\frac{\alpha^m}{k}\pi\frac{1.3.5\ldots m}{2.4.6\ldots(m+1)}.$$

La variation de durée ΔT sera, d'après la formule générale du n° 9, donnée par l'expression

$$\Delta T = -\frac{\varepsilon\alpha^{m-1}}{k^3}\pi\frac{1.3.5\ldots m}{2.4.6\ldots(m+1)},$$

ou

$$\Delta T = -\frac{\varepsilon\alpha^{m-1}}{k^3}\mathrm{I}_m(\pi) \qquad (m \text{ impair}),$$
$$\Delta T = 0 \qquad (m \text{ pair}).$$

21. **Premier exemple : Second terme de la formule du pendule.** — 1° La formule (1) du n° 2 devient, dans l'hypothèse $l = \text{const.} = l_0$,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2\sin\theta = 0,$$

qu'on a simplifiée (n° 3) pour obtenir le terme principal de la série en remplaçant le sinus par l'arc.

Conservons maintenant le second terme du sinus dont le développement est

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Il viendra alors

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2\theta - \frac{1}{1.2.3}k^2\theta^3 = 0.$$

On aura donc un terme perturbateur égal à

$$-\frac{1}{1.2.3}k^2\theta^3.$$

2° La fonction $\mathbf{E}_s$, qui a pour expression

$$\mathbf{E}_s = -\frac{\alpha^3}{k}\int_0^{kt}\cos^3 kt\sin kt\,dkt,$$

s'intégrera par la formule

$$\mathbf{E}_s = -\frac{\alpha^3}{4k}(1 - \cos^4 kt).$$

C'est le cas de *m impair* : $\mathbf{E}_s(\pi)$ sera nul; $\Delta\alpha = 0$.

3° Calculons la fonction

$$\mathbf{E}_c = -\frac{\alpha^3}{k}\int_0^{kt} \cos^4 kt\, dkt.$$

La formule de récurrence (n° 20)

$$(m+1)\,\mathrm{J}_m = \sin y \cos^m y + m\,\mathrm{J}_{m-2}$$

donnera

$$2\,\mathrm{J}_1 = \cos y \sin y + \mathrm{J}_{-1},$$
$$4\,\mathrm{J}_3 = \cos^3 y \sin y - 3\,\mathrm{J}_1.$$

Mais on a

$$\mathrm{J}_{-1} = y;$$

donc

$$\int_0^y \cos^4 y\, dy = \mathrm{J}_3 = \frac{1}{4}\cos y \sin y\left(\cos^2 y + \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{8}y;$$

par suite

$$\mathbf{E}_c = -\frac{\alpha^3}{4k}\left[\cos kt \sin kt\left(\cos^2 kt - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}kt\right].$$

4° On aura alors, d'après les formules générales du n° 8, en faisant $\varepsilon = -\frac{k^2}{1.2.3}$, pour le deuxième terme du développement de la formule du pendule, l'expression

$$\theta = -\alpha \cos kt - \frac{1}{1.2.3.4}\,\frac{\alpha^3}{2}\sin kt\,(3kt + \sin kt \cos kt),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = k\alpha \sin kt - \frac{1}{1.2.3.4}$$
$$\times k\alpha^3\left[\frac{3}{2}kt \cos kt + \sin kt\,(2 + 3\cos^2 kt)\right].$$

5° Faisons $kt = \pi$ dans les termes en α^3. Celui de

l'angle s'annule. Donc, *l'amplitude de l'oscillation n'est pas modifiée,* résultat évident *a priori.*

La parenthèse de $\frac{d\theta}{dt}$, pour $\cos kt = -1$, devient $-\frac{3}{2}\pi$ et, par suite, la vitesse s'annule pour une valeur

$$\sin kt = -\frac{3}{2}\frac{\alpha^2}{1.2.3.4}\pi,$$

d'où

$$\Delta T = \frac{3}{2}\frac{\alpha^2}{1.2.3.4}\frac{\pi}{k}.$$

La valeur ΔT prend donc la forme

$$\Delta T = \frac{1}{16}\alpha^2 T.$$

C'est le second terme, bien connu, de la formule qui donne la durée d'oscillation du pendule.

6° On peut vérifier que la formule générale démontrée ci-dessus (n° 20)

$$\Delta T = -\frac{\varepsilon\alpha^{m-1}}{k^3}\pi\frac{1.3.5\ldots m}{2.4.6\ldots(m+1)}$$

donne bien la même expression quand on y fait

$$m = 3 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon = -\frac{k^2}{1.2.3}.$$

7° Au point le plus bas, on a (n° 9, 3°)

$$\Delta T_{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{k^2\alpha}\mathbf{E}_c\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\Delta\theta'_m = -\varepsilon\mathbf{E}_s\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Comme

$$\mathbf{E}_c\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\alpha^3}{4k}\frac{3}{2}\frac{\pi}{2}$$

et

$$\mathbf{E}_s\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\alpha^3}{4k},$$

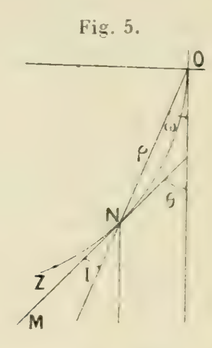
il viendra

$$\Delta T_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{32} \alpha^2 T,$$

$$\Delta \theta'_m = - \frac{\alpha^2 \theta'_m}{1.2.3.4}.$$

22. **Deuxième exemple : Pendule à enroulement de fil.** — Prenons maintenant un exemple un peu plus complexe, où la longueur l du pendule variera.

Fig. 5.



1° Supposons que le fil MNO s'enroule sur une courbe OZ dont l'équation polaire sera

$$\rho = \beta l_0 \omega^2 (1 + A_1 \omega + A_2 \omega^2 + \ldots),$$

β étant un coefficient numérique.

La longueur du fil est actuellement l et sa longueur totale est

$$l_0 = l + \rho,$$

à un terme du troisième ordre en ω près, la corde étant substituée à l'arc.

La tangente en M fait avec le rayon vecteur ρ un angle I tel que

$$\operatorname{tang} I = \frac{\rho}{\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)} = \frac{1}{2} \omega.$$

On a donc

$$I = \frac{1}{2}\omega$$

à un terme du troisième ordre près.

D'autre part

$$\theta = I + \omega = \frac{3}{2}\omega.$$

On aura alors

$$l = l_0 - \rho = l_0(1 - \beta\omega^2) = l_0\left(1 - \frac{4}{9}\beta\theta^2\right).$$

2° Il vient alors

$$\frac{1}{l_0}\frac{dl}{dt} = -\frac{8}{9}\beta\theta\frac{d\theta}{dt},$$

et nous porterons cette valeur dans l'équation du n° 2

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{l}\frac{dl}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\theta = 0,$$

qui deviendra

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{16}{9}\beta\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{g}{l_0}\theta\left(1 + \frac{4}{9}\beta\theta^2\right) = 0,$$

ce qui se réduit à

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2\theta + \frac{4}{9}\beta\theta\left[k^2\theta^2 - 4\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = 0.$$

Avec les relations

$$\theta = -\alpha \cos kt,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha k \sin kt,$$

le terme perturbateur prend la forme

$$\frac{4}{9}\beta k^2\alpha^3 \cos kt(4 \sin^2 kt - \cos^2 kt$$

Dans les formules générales (8), on aura donc

$$\varepsilon = \frac{4}{9}\beta k^2 \alpha^3,$$

$$\varphi(t) = \cos kt(4 \sin^2 kt - \cos^2 kt).$$

3° Les deux intégrales $\mathbf{E}_s$ et $\mathbf{E}_c$ sont alors

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{k}\int_0^{kt} \cos kt(4 - 5\cos^2 kt)\sin kt\, dkt,$$

d'où

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{k}\left(2 - \frac{5}{4}\sin^2 kt\right)\sin^2 kt.$$

Puis

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{k}\int_0^{kt} \cos^2 kt(4 - 5\cos^2 kt)\, dkt,$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{k}(4\mathrm{J}_1 - 5\mathrm{J}_3),$$

et, d'après les formules du n° 21, 3°,

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{8}kt + \cos kt \sin kt\left(\frac{1}{8} - \frac{5}{4}\cos^2 kt\right)\right].$$

Les équations du mouvement s'écriraient donc aisément.

4° Faisant $kt = \pi$, on voit que

$$\mathbf{E}_s(\pi) = 0,$$

$$\mathbf{E}_c(\pi) = \frac{1}{8}\frac{\pi}{k} = \frac{1}{8}\mathbf{T}.$$

L'amplitude de l'oscillation n'est donc pas modifiée.

La variation de la *durée d'oscillation*, d'après la formule générale (9), sera

$$\Delta\mathrm{T} = \left(\frac{4}{9}\beta k^2\alpha^3\right)\frac{1}{k^2\alpha}\frac{\mathrm{T}}{8} = \frac{1}{2.3.3}\beta\alpha^2\mathbf{T}.$$

C'est donc une formule tout à fait analogue à celle

qui représente l'influence du second terme du sinus (n° 21, 5°).

23. **Troisième exemple : Pendule cycloïdal.** — Quelle courbe doit-on faire décrire au point matériel M relié, par un fil toujours tendu, au point fixe O, pour que la durée d'oscillation soit celle du pendule simple

$$T = \frac{\pi}{k},$$

à un terme en α^5 près?

Il s'agit donc d'éliminer l'erreur due à l'omission du

Fig. 6.

terme en θ^3 dans le sinus, qui a produit (n° 21), une augmentation de durée

$$\Delta T = \frac{1}{16}\alpha^2 T.$$

Posons $l = l_0(1 + q\theta^2)$ comme équation polaire de la courbe cherchée ; q est l'inconnue.

On aura

$$\frac{1}{l_0}\frac{dl}{dt} = 2q\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

Il en résulte l'équation différentielle du n° 22, 2°, où l'on remplacera $-\frac{4}{9}\beta$ par q.

On a donc les mêmes conclusions que ci-dessus et l'on aura

$$\Delta T = -\frac{q}{8}\alpha^2 T.$$

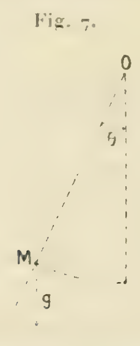
Donc, il suffira de prendre $q = \frac{1}{2}$ pour rendre *isochrones* les oscillations du pendule jusqu'aux termes en α^5 près.

V. — PENDULE AVEC FIL ÉLASTIQUE.

24. **Tension du fil.** — Nous supposons que le pendule est suspendu par un fil dont la totalité ou une partie seulement est élastique. Il s'allonge donc ou se raccourcit suivant la valeur de la *tension* due au mouvement du pendule.

Nous admettrons que l'allongement du fil est *sta-*

Fig. 7.



tique, c'est-à-dire qu'il suit exactement et immédiatement toutes les variations de la tension; cela exige, comme on sait, que la période vibratoire propre du fil élastique soit infiniment petite, relativement à la période T du pendule.

La tension du fil se compose de deux termes, l'un dû

à la variation de la *composante de la gravité* suivant la direction θ du fil, l'autre dû à la force centrifuge.

Soit l_0 la longueur du fil, pour $\theta = 0$, lorsque le poids y est suspendu et au *repos*.

Pour un angle θ, la composante de la pesanteur suivant le fil est

$$mg\cos\theta.$$

La composante de la *force centrifuge* est

$$\frac{mv^2}{l}.$$

Donc, la *tension* du fil est

$$m\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{l}\right).$$

Soient λ la longueur du fil quand le poids mg ne lui est pas suspendu, e le coefficient d'élasticité de la partie élastique du fil. On a, d'après la formule ordinaire,

$$l_0 = \lambda\left(1 + \frac{mg}{e}\right)$$

et

$$l = \lambda\left[1 + \frac{m}{e}\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{l}\right)\right].$$

On aura donc

$$\frac{l}{l_0} = \frac{1}{1 + \frac{mg}{e}}\left[1 + \frac{m}{e}\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{l}\right)\right],$$

ce qui pourra, à l'approximation admise, s'écrire

$$\frac{l}{l_0} = 1 + \frac{m}{e + mg}\left(\frac{v^2}{l_0} - \frac{g\theta^2}{2}\right).$$

Exprimons de suite v et θ en fonction de t,

$$v = l_0\frac{d\theta}{dt} = l_0 k\alpha\sin kt,$$

$$\theta = -\alpha\cos kt.$$

Il vient

$$\frac{l}{l_0} = 1 + \frac{mg}{e+mg}\alpha^2\left(\sin^2 kt - \frac{1}{2}\cos^2 kt\right).$$

25. **Équation du mouvement.** — On aura

$$\frac{1}{l_0}\frac{dl}{dt} = 3\frac{mg}{e+mg}k\alpha^2 \sin kt \cos kt.$$

Portant dans l'équation

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{l}\frac{dl}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\theta = 0,$$

on arrivera, après quelques réductions, à l'équation

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2\theta + \frac{1}{2}\frac{mg}{e+mg}k^2\alpha^3 \cos kt(15\sin^2 kt - 1) = 0.$$

Dans les formules générales (9), on devra donc faire

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{mg}{e+mg}k^2\alpha^3$$

et

$$\varphi(t) = (15\sin^2 kt - 1)\cos kt.$$

26. **Fonctions $\mathbf{E}_s$ et $\mathbf{E}_c$.** — 1° On a

$$\mathbf{E}_s = \frac{15}{k}\int_0^{kt}\sin^3 kt \cos kt\, dkt - \frac{1}{k}\int_0^{kt}\cos kt \sin kt\, dkt,$$

d'où

$$\mathbf{E}_s = \frac{15}{4k}\sin^4 kt - \frac{1}{2k}\sin^2 kt.$$

2° On a

$$\mathbf{E}_c = \frac{14}{k}\int_0^{kt}\cos^2 kt\, dkt - \frac{15}{k}\int_0^{kt}\cos^4 kt\, dkt$$

ou

$$\mathbf{E}_c = \frac{14}{k}J_1 - \frac{15}{k}J_3$$

et, d'après les formules données (n° **21**, 3°),

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{4k}\left[\frac{11}{2}kt + \cos kt \sin kt\left(\frac{11}{2} - 15\cos^2 kt\right)\right].$$

3° D'après ces expressions, on aura

$$\mathbf{E}_s(\pi) = 0.$$

L'amplitude de l'arc n'est pas changée.

Puis

$$\mathbf{E}_c(\pi) = \frac{11}{8}\mathrm{T}.$$

D'après la formule générale (9) qui donne $\Delta\mathrm{T}$, il viendra

$$\Delta\mathrm{T} = \frac{11}{16}\,\frac{mg}{e+mg}\,\alpha^2\mathrm{T}.$$

C'est une formule du même genre que celles trouvées aux nos **22** et **23**.

$\Delta\mathrm{T}$ est toujours positif : l'effet de l'élasticité s'ajoute donc à l'erreur commise en négligeant le terme en θ^3 du sinus.

VI. — PENDULE DE LONGUEUR VARIABLE.

27. **Énoncé du problème.** — Donnons maintenant un dernier exemple, où nous ferons intervenir le temps.

Un seau descend lentement dans un puits et oscille pendant que le câble s'enroule ou se déroule.

Trouver son mouvement, assimilé à celui d'un pendule simple de longueur variable ?

On suppose que le mouvement de déroulement se fait à *vitesse constante* et très lentement.

La longueur actuelle du câble est l et, l_0 étant la lon-

gueur à l'origine des temps, on a

$$l = l_0(1 + at),$$

a est la vitesse très petite de descente.

28. Équation du mouvement. — On a

$$\frac{dl}{dt} = al_0.$$

L'équation générale

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{l}\frac{dl}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

deviendra

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2\theta + a\left(2\frac{d\theta}{dt} - k^2\theta t\right).$$

La fonction $\varphi(t)$ de la théorie générale dépend donc ici, à la fois, de l'arc θ, de la vitesse $\frac{d\theta}{dt}$ et du temps t.

Remplaçant θ par sa valeur principale $-\alpha \cos kt$, et $\frac{d\theta}{dt}$ par $\alpha k \sin kt$, on aura

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2\theta + a\alpha k(kt \cos kt + 2 \sin kt) = 0,$$

d'où

$$\varepsilon = a\alpha k \qquad \text{et} \qquad \varphi(t) = kt \cos kt + 2 \sin kt.$$

29. Fonction E_s. — On a

$$k E_s = \int_0^{kt} kt \sin kt \cos kt \, dkt + 2\int_0^{kt} \sin^2 kt \, dkt.$$

En intégrant par parties,

$$k E_s = \frac{kt}{2}\sin^2 kt + \frac{3}{2}\int_0^{kt} \sin^2 kt \, dkt.$$

Mais (n° 15)

$$\int_0^{kt} \sin^2 kt \, dkt = \frac{kt}{2} - \frac{1}{2}\cos kt \sin kt.$$

Donc

$$kE_s = \frac{kt}{2}\sin^2 kt + \frac{3kt}{4} - \frac{3}{4}\cos kt \sin kt.$$

30. **Fonction E_c.** — On a

$$kE_c = \int_0^{kt} kt \cos^2 kt \, dkt + 2\int_0^{kt} \sin kt \cos kt \, dkt.$$

Mais (n° 20)

$$\int_0^{kt} \cos^2 kt \, dkt = \frac{kt}{2} + \frac{1}{2}\sin kt \cos kt.$$

Intégrant par parties, on aura

$$kE_c = \frac{kt}{2}(kt + \sin kt \cos kt) - \frac{1}{2}\int_0^{kt} kt - 3\sin kt \cos kt)\, dkt$$
$$= \frac{kt}{2}(kt + \sin kt \cos kt) - \frac{1}{4}(kt)^2 + \frac{3}{4}\sin^2 kt$$

ou enfin

$$kE_c = \frac{(kt)^2}{4} + \frac{3}{4}\sin^2 kt + \frac{kt}{2}\sin kt \cos kt.$$

31. **Équations du mouvement.** — Portant, dans les valeurs de θ et de $\frac{d\theta}{dt}$, les expressions précédentes, on trouve

$$\theta = -\alpha \cos kt - \frac{1}{4}\frac{a\alpha}{k}[(kt)^2 \sin kt - 3kt \cos kt + 3\sin kt],$$

$$\frac{d\theta}{dt} = k\alpha \sin kt - \frac{a\alpha}{4}[(kt)^2 \cos kt - kt \sin kt].$$

32. **Durée de l'oscillation.** — D'après la formule générale (9)

$$\Delta T = \frac{\varepsilon}{k^2\alpha}E_c(\pi),$$

en remarquant que

$$E_c(\pi) = \frac{1}{k}\frac{\pi^2}{4}$$

et

$$\varepsilon = a\alpha k,$$

il viendra

$$\Delta T = \frac{a}{4} T^2.$$

On peut remarquer que la durée de l'oscillation $T + \Delta T$ correspond à celle d'un pendule dont la longueur serait $l = l_0 \left(1 + a \frac{T}{2}\right)$, moyenne des deux longueurs aux deux extrémités de l'arc.

33. **Amplitude de l'arc.** — D'après la formule générale (9)

$$\Delta\alpha = -\frac{\varepsilon}{k} \mathbf{E}_s(\pi),$$

en remarquant que

$$\mathbf{E}_s(\pi) = \frac{3\pi}{4k}$$

et que

$$\varepsilon = a\alpha k,$$

il viendra

$$\Delta\alpha = -\frac{3}{4} a\alpha T.$$

34. **Point le plus bas.** — 1° Pour aller du point $-\alpha$ au point O, on a (n° 9, 3°) une *augmentation de durée*

$$\Delta T_{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{k^2\alpha} \mathbf{E}_c\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Mais

$$\mathbf{E}_c\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4k}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 3\right].$$

On aura donc

$$\Delta T_{\frac{1}{2}} = \frac{a}{4k^2}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 3\right] = \frac{a}{4\pi^2}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 3\right] T^2.$$

2° La *perte de vitesse* sera

$$\Delta\theta'_m = -\varepsilon \mathbf{E}_s\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

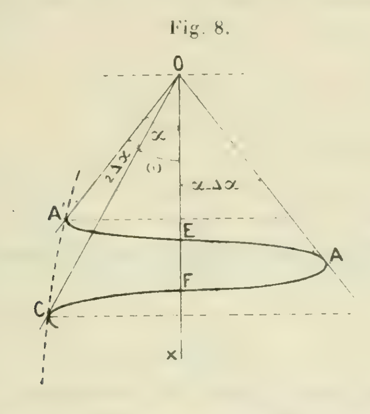
qui devient

$$\Delta\theta'_m = -\frac{5}{8}a\alpha\pi.$$

35. **Forme de la trajectoire.** — On démontrera aisément les propriétés suivantes :

1° La trajectoire part du point initial A′ tangentiellement à la droite OA′.

Fig. 8.



2° Elle coupe en E la verticale et présente en ce point une inflexion : la tangente n'est pas horizontale, mais inclinée vers la droite (composition de la vitesse horizontale du pendule et de la vitesse de descente du fil).

3° Au point A, d'amplitude $\alpha - \Delta\alpha$, la tangente est AO.

4° En F, point d'inflexion.

5° En C, la tangente est CO, qui fait avec Ox un angle $\alpha\left(1 - \frac{3}{2}a\mathrm{T}\right)$.

6° De A′ en C le fil s'est allongé de $2l_0 a\mathrm{T}$, car on a

$$l = l_0(1 + 2a\mathrm{T}).$$

L'angle a diminué de $-\frac{3}{2}a\alpha\mathrm{T}$.

On peut donc, en coordonnées polaires (l, ω), écrire

$$dl = 2\,a\,l_0\,\mathrm{T},$$

$$d\omega = -\frac{3}{2}\,a\,\omega\,\mathrm{T}$$

et, par suite,

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{3}{2}\,\frac{dl}{l_0},$$

c'est l'équation différentielle de la courbe, lieu des points C.

On trouve

$$l = l_0 + \frac{2}{3}\,l_0\,\mathrm{Log}\,\frac{\alpha}{\omega}$$

pour son équation.

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Poitiers.

Épreuve théorique. — *On considère les plans* P *donnés en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation*

$$\lambda x \cos\omega + \lambda y \sin\omega - p^2 = \frac{p^2 + \lambda^2}{2}$$

et qui dépendent des deux paramètres λ *et* ω :

1° *Soit* δ *la distance du point* $\mathrm{M}(y = p,\ z = \gamma)$ *du plan* $y\mathrm{O}z$ *à l'un des plans* P; *on demande de trouver les plans* P *pour lesquels la* valeur absolue *de* δ *est maximum ou minimum.*

A quelle condition cette valeur absolue peut-elle être nulle?

2° *Partager le plan des* yz *en régions suivant le nombre des maxima et minima correspondant au point* M.

3° *Trouver la surface* S *enveloppe des plans* P. *Calculer en un point de cette surface les rayons de courbure principaux.*

4° *Soit* C *la courbe de* S, *lieu des points de contact*

avec S *des plans* P *qui passent par un point* $x = \alpha$ *de l'axe* Ox; *former l'équation différentielle des projections* Γ, *sur le plan des* xy, *de toutes les courbes* C *obtenues en faisant varier* α

5° *Former l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des courbes* Γ; *l'intégrer en la transformant en coordonnées polaires. Vérifier que les courbes obtenues sont les projections sur le plan des* xy *des sections de* S *par les plans qui passent par* Ox.

Épreuve pratique. — *Un point matériel* M, *de masse égale à l'unité, se meut sur l'axe* Ox *sous l'action d'une force*

$$F = -\left(k\frac{dx}{dt} + \frac{a^2}{4}x\right),$$

où k *est une constante positive.*

1° *Étudier le mouvement de* M *dans les diverses hypothèses qui peuvent se présenter quand* k *varie.*

2° *En supposant* k *assez petit et le point* M *abandonné en* M_0 $(x = x_0)$ *sans vitesse initiale, ce point arrive en* O *sous l'action de* Γ *dans le temps* T. *Comment peut-on trouver ce temps ?*

Calculer les premiers termes du développement de T *suivant les puissances croissantes de* k :

$$T = T_0 + T_1 k + T_2 k^2 + \ldots$$

(Juillet 1907.)

Épreuve théorique. — *On considère les plans* P, *variables avec* λ, *qui ont pour équation*

$$1 + \lambda x + \lambda^2 y + \lambda^3 z = 0.$$

1° *Soit* A *un point de coordonnées* (α, β, γ); *montrer qu'il passe en général par* A *un ou trois plans* P *réels. Trouver la surface* S *limitant la région où doit se trouver* A *pour qu'il n'y passe qu'un plan réel.*

Quand A *est sur* S, *il passe par* A *deux plans* P *réels; former leurs équations.*

Examiner en détail le cas où A *se trouve dans l'un des plans* yOz *ou* xOy.

2° *La surface* S *est l'enveloppe des plans* P : *trouver les*

génératrices rectilignes G de cette surface et son arête de rebroussement. Vérifier que la coordonnée z considérée comme fonction de x et y satisfait à la relation du second ordre : $rt - s^2 = 0$.

3° *Soit* $y = f(x)$ *l'équation de la projection sur* xOy *d'une génératrice* G; *former l'équation différentielle que vérifient toutes les fonctions* $f(x)$, *et l'intégrer* directement, *c'est-à-dire sans faire usage des résultats obtenus.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{\pi} y\,dx,$$

y étant celle des intégrales de l'équation

$$y''' - 3y' - 2y = 10(\sin x - x\cos x) - 8x^3$$

qui s'annule pour $x = 0$ *ainsi que ses deux premières dérivées.* (Novembre 1907.)

QUESTION.

2095. Si deux quadriques ont en commun deux génératrices Ox, Oy, le long desquelles elles se raccordent, elles ont en O un contact du troisième ordre, c'est-à-dire qu'une perpendiculaire au plan xOy rencontre les deux quadriques en deux points M et M' dont la distance est un infiniment petit du quatrième ordre en prenant OM comme infiniment petit principal [1]. G. F.

[1] Sur une surface, au lieu d'une ligne dont chaque point admettrait une quadrique osculatrice, il existe, en conséquence, un nombre fini de points admettant un faisceau de quadriques osculatrices (HERMITE, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*). Ces points sont les points biflecnodaux de la surface (SALMON, *Géométrie analytique à trois dimensions*, t. III, p. 156).

[M¹5g]

ÉTUDE SUR LES CONIQUES POLAIRES DES CUBIQUES PLANES ;

Par M. BARRÉ,
Capitaine du Génie.

I. Soit

$$(1)\quad \begin{cases} f(x, y, z) \equiv a x^3 + 3 b x^2 y + 3 c x y^2 + d y^3 \\ \qquad + 3 z (e x^2 + 2 g x y + h y^2) \\ \qquad + 3 z^2 (k x + l y) + p z^3 = 0 \end{cases}$$

l'équation en coordonnées trilinéaires quelconques d'une cubique plane.

La conique polaire d'un point de coordonnées x_0, y_0, z_0 a pour équation

$$(2)\qquad x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f}{\partial y} + z_0 \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

ou encore

$$(3)\quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} + 2 x y \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} + \ldots + z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z_0^2} = 0.$$

II. Problème I. — *Étant donnée, dans le plan d'une cubique plane, une droite* D, *trouver à quelles conditions il existe dans ce plan un point dont la conique polaire, par rapport à la cubique, comprenne la droite* D.

Prenons un triangle de référence dont l'un des côtés soit précisément la droite D, que nous choisirons pour axe $z = 0$. Pour que la polaire d'un point $P(x_0, y_0, z_0)$ comprenne la droite D, il faut et il suffit évidemment

qu'on ait

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} = 0,$$

c'est-à-dire que le point P soit un point commun aux trois droites

$$(5)\quad ax + by + ez = 0, \quad bx + cy + gz = 0, \quad cx + dy + hz = 0.$$

1° En général, le déterminant Δ des coefficients de x, y et z dans les équations (5) n'est pas nul et il n'y a pas de point répondant à la question.

2° Si Δ est nul sans que tous ses mineurs le soient, il existe un point P et un seul à distance finie ou infinie satisfaisant aux conditions du problème.

Il est à peu près évident que si Δ ne passe pas par un point double de la courbe, les tangentes à celle-ci aux points où elles rencontrent D passent par P. Si D est une tangente inflexionnelle, son point de contact répond à la question : c'est un cas limite de la disposition dont il vient d'être question.

Supposons que D passe par un point double. Prenons un triangle de référence dont ce point soit le sommet $y = 0$, $z = 0$; on doit avoir

$$a = b = e = 0.$$

et Δ est identiquement nul. Donc :

Si D *passe par le point double d'une cubique unicursale, il existe toujours un point, unique en général, à distance finie ou infinie dont la conique polaire comprend la droite* D.

3° Δ est nul ainsi que ses mineurs, mais tous ses éléments ne sont pas nuls [1]. Il existe alors une infi-

---

[1] Si tous les éléments de Δ étaient nuls, la cubique se réduirait

nité de points, situés sur une droite D_1, répondant à la question. Prenons D_1 comme côté $y = 0$ du triangle de référence; les trois équations (5) doivent être vérifiées dès qu'on y fait $y = 0$. Ceci exige les conditions

$$a = b = c = e = g = h = 0.$$

L'équation de la cubique se réduit à

$$(6) \qquad dy^3 + 3z^2(kx + ly) + pz^3 = 0.$$

C'est une cubique cuspidale dont D *est la tangente de rebroussement et* D_1 *la droite de jonction du rebroussement au point d'inflexion unique de la cubique.*

Réciproquement : *La conique polaire d'un point quelconque de la droite, qui joint le point de rebroussement d'une cubique cuspidale à son point d'inflexion, se décompose en deux droites dont la tangente de rebroussement.*

Ce résultat se démontre sans aucune difficulté en rapportant la cubique à un triangle de référence fourni par sa tangente de rebroussement, sa tangente d'inflexion et la droite qui joint le point d'inflexion au point de rebroussement.

III. Problème II. — *Trouver dans quels cas la conique polaire d'un point du plan d'une cubique plane peut se réduire à un faisceau formé de deux droites dont celle de l'infini.*

La solution de cette question est un corollaire immé-

à deux droites, dont une double. Nous laissons au lecteur le soin d'interpréter les résultats dans ce cas et d'une façon générale dans les divers cas de dégénérescence. Cette étude ne présente aucune difficulté et souvent aucun intérêt spécial.

diat de celle de la précédente. Il suffit de prendre pour droite D la droite de l'infini. Il suffira donc d'énoncer les résultats :

1. *Étant donnée une cubique plane, il n'y a pas, en général, de point dont la conique polaire se réduise à un faisceau de deux droites, dont celle de l'infini.*

2. *Lorsqu'il existe un point pour lequel ce fait se présente et que la cubique ne présente ni point double à l'infini, ni point parabolique inflexionnel, les trois asymptotes concourent en ce point. Inversement, si les trois asymptotes d'une cubique sont concourantes, leur point de concours répond à la question.*

3. *Dans le cas d'un point double à l'infini, à asymptotes distinctes, il existe un point et un seul, d'ailleurs à distance finie, répondant à la question.*

4. *Lorsque la cubique possède un point parabolique simple, inflexionnel, le point de contact de la cubique et de la droite de l'infini est le seul point répondant à la question.*

5. *Enfin, s'il existe sur la cubique un rebroussement parabolique, tous les points de la parallèle à la direction asymptotique unique menée par le point d'inflexion de la cubique répondent à la question.*

IV. Définitions et propriétés des points centraux. — *Considérons spécialement les cubiques dont les trois asymptotes ont un point commun au moins à distance finie.* (Cas 2° et 5° du numéro précédent.)

Nous donnerons à un pareil point le nom de point central.

Cette dénomination est justifiée par les propriétés de ce point, propriétés dont nous allons exposer les principales.

1° Supposons qu'on ait rapporté la cubique à un système de coordonnées cartésiennes dont l'origine soit en un point central. Les équations (5) doivent être vérifiées pour $x = y = 0$. Les coefficients e, g, h doivent donc être nuls. L'inverse est évidemment vrai. Donc :

Théorème I. — *Si une cubique possédant un point central est rapportée à un système de coordonnées cartésiennes ordinaires dont ce point soit l'origine, l'équation de cette courbe ne contient pas de termes du second degré.*

Réciproquement : *Si l'équation cartésienne d'une cubique plane ne possède pas de termes du second degré, l'origine du système de coordonnées auquel est rapportée la cubique est un point central de celle-ci.*

2° En se fondant sur le théorème précédent, on obtient par une méthode classique le théorème suivant que je me borne à énoncer :

Théorème II. — *Le centre des moyennes distances des points d'intersection d'une cubique plane possédant un point central avec toute sécante passant par ce point coïncide avec lui.*

Réciproquement : *Si dans le plan d'une cubique plane il existe un point* (P) *tel que toute sécante qui y passe coupe la cubique en trois points dont le centre des moyennes distances coïncide avec le point* P, *celui-ci est un point central de la cubique.*

3° Si l'on exprime que la cubique passe par un point

central pris comme origine des coordonnées, outre les conditions déjà obtenues ($e = g = h = 0$), on trouve $p = 0$. L'équation n'a plus que des termes impairs et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème III. — *Si une cubique plane possède un point central par lequel elle passe, ce point est un centre de la cubique.*

Réciproquement : *Le centre d'une cubique à centre est un point central de la cubique.*

Considérons, en particulier, le cas d'une cubique à rebroussement parabolique. Nous avons vu qu'une telle courbe possédait une ligne de points centraux, à savoir : la parallèle menée par le point d'inflexion de la cubique à sa direction asymptotique. De cette propriété et des théorèmes I et II on déduit immédiatement le théorème suivant facile à retrouver directement :

Théorème IV. — *Si une cubique plane admet un rebroussement parabolique, elle possède à distance finie un point d'inflexion qui est aussi un centre. Le centre des moyennes distances des points d'intersection de la cubique avec une sécante quelconque est toujours situé sur la parallèle à la direction asymptotique menée par le centre de la cubique.*

Observation. — Dans ce qui précède, on n'a fait aucune supposition sur la réalité des coefficients de la cubique. Désormais, nous limiterons notre étude aux cubiques réelles ; nous ferons remarquer que cette restriction n'est pas absolument nécessaire dans tout ce qui suit. Le lecteur fera aisément, lorsqu'il y aura lieu, les modifications à nos énoncés, nécessitées par la suppression de cette restriction.

V. Problème III. — *Déterminer les points du plan d'une cubique plane dont la conique polaire par rapport à la cubique soit un cercle.*

Soit

$$(1)\qquad f(x, y, z) = ax^3 + 3bx^2y + \ldots + pz^3 = 0$$

l'équation homogène de la cubique rapportée à des axes rectangulaires, et α, β, γ les coordonnées homogènes du point dont nous étudions la conique polaire. Pour que celle-ci soit un cercle, il faut et il suffit évidemment que α, β et γ vérifient les relations

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} = 0,$$

autrement dit, que le point cherché appartienne à la fois aux deux droites représentées par les équations

$$(3)\qquad \begin{cases} (a-c)x + (b-d)y + (e-h)z = 0, \\ bx \qquad + cy \qquad + gz \qquad = 0. \end{cases}$$

Discussion. — 1° Ces droites se coupant en général en un point à distance finie, il y a en général un point et un seul répondant à la question et situé à distance finie.

2° Si la condition

$$(4)\qquad (a-c)c = (b-d)b \quad \text{ou} \quad ac + bd = b^2 + c^2$$

est vérifiée, les droites (3) seront en général parallèles et distinctes, et il y aura un seul point à l'infini répondant à la question. Soient m_1, m_2, m_3 les coefficients angulaires des directions asymptotiques de la cubique; on trouve sans difficulté que la condition (4) équivaut

à la suivante :

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} &3m_1m_2m_3(m_1+m_2+m_3)+3\sum m_1m_2 \\ &=\Big[\sum m_1\Big]^2+\Big[\sum m_1m_2\Big]^2. \end{aligned} \right.$$

En prenant pour axe des x une parallèle à une direction asymptotique réelle de la cubique et désignant par m_1 celui des trois coefficients angulaires qui s'annule, la condition (5) se réduit à la suivante :

$$(6)\qquad (m_3+m_3)^2+m_2^2\,m_3^2=3\,m_2\,m_3.$$

Désignons sous le nom de courbes Γ *les courbes répondant à la définition représentée par la formule* (6). On voit que les courbes Γ ont nécessairement deux directions asymptotiques imaginaires, à moins que les directions asymptotiques ne soient toutes confondues : l'équation (6) ne peut, en effet, admettre comme seules solutions réelles que $m_2=m_3=0$.

Cas où il existe une direction asymptotique triple. — Elle est nécessairement réelle ; prenons pour axe Ox une parallèle à cette direction.

Les coefficients a, b, c doivent alors s'annuler, et, d'autre part, d restera différent de zéro, sans quoi la cubique se décomposerait en une conique et la droite de l'infini, hypothèse dont nous avons dit faire abstraction.

Les équations (3) se réduisent aux suivantes :

$$(7)\qquad -dy+(e-h)z=0,\qquad gz=0.$$

1° Si l'on suppose g différent de zéro, que e soit nul ou non [1], seul le point à l'infini de la courbe peut

---

[1] Si $e\neq 0$, point à l'infini simple parabolique et inflexionnel. Si $e=0$, point double avec une branche parabolique.

répondre à la question. Mais dans tous les cas le cercle correspondant dégénère en deux droites, dont celle de l'infini. Il n'y a donc pas en réalité de point dont la conique polaire soit un cercle.

2° Si l'on suppose g nul, tous les points de la première des droites représentées par l'équation (7) ont pour conique polaire un cercle.

Cette droite est d'ailleurs toujours à distance finie, puisqu'on suppose $d \neq 0$. Si e n'est pas nul, le point à l'infini est simple, mais parabolique et inflexionnel. Les polaires circulaires sont de vrais cercles en général. Il n'en est plus ainsi si e est nul. La courbe présente un rebroussement parabolique, la droite représentée par la première équation (7) se confond avec le lieu des points centraux et les polaires correspondant aux points de cette droite dégénèrent en deux droites, dont celle de l'infini.

3° Si la condition (4) est vérifiée, les droites (3) sont en général distinctes. Elles peuvent être confondues et nous venons d'en rencontrer un exemple : *il existe alors une droite de points dont la première polaire soit un cercle.* En faisant abstraction du cas que nous venons de signaler, on démontre que les cubiques Γ douées d'un point central possèdent seules une droite de points à première polaire circulaire. Je laisse au lecteur le soin d'établir ce résultat et me borne à énoncer le théorème suivant qui résume cette recherche :

Théorème V. — *Les cubiques* Γ *douées d'un point central et une classe de cubiques admettant à l'infini un point simple parabolique et inflexionnel sont les seules auxquelles correspond une infinité de points en ligne droite dont la conique polaire soit un cercle.*

VI. Problème IV. — *Déterminer les points du plan d'une cubique plane dont la première polaire soit une hyperbole équilatère.*

Adoptons les mêmes axes et les mêmes notations que dans le problème précédent. La condition caractéristique du problème actuel est

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} = 0.$$

ou, en développant et remplaçant α et β par des coordonnées courantes x, y,

$$(2) \qquad (a+c)x + (b+d)y + (e+h)z = 0.$$

Cette équation représentant une droite, il y a donc en général une infinité de points en ligne droite répondant à la question.

Discussion. — 1° La droite (2) est en général à distance finie; elle se réduit à la droite de l'infini si l'on a à la fois

$$(3) \qquad (a+c) = 0, \qquad b+d = 0,$$

$$(4) \qquad e+h \neq 0.$$

En spécialisant les axes comme dans le problème précédent, on peut supposer le coefficient angulaire m_1 nul et les équations (3) deviennent

$$m_2 + m_3 = 0, \qquad m_2 m_3 + 3 = 0 \qquad \text{ou} \qquad m_2 = -m_3 = \pm\sqrt{3},$$

résultat qui s'interprète immédiatement : *Les directions asymptotiques sont parallèles aux trois côtés d'un triangle équilatéral.*

2° Si aux équations (3) on joint la relation

$$(5) \qquad e+h = 0,$$

l'équation (2) devient une identité et la polaire de tout point du plan est une hyperbole équilatère. On vérifie sans aucune difficulté que l'ensemble des équations (3) et (4) entraîne l'existence d'un point central [1]. *Les trois asymptotes de la cubique forment donc les diamètres d'un hexagone régulier*. Je ne m'arrêterai pas non plus à vérifier que cette condition suffit. Les résultats précédents seront résumés par le théorème suivant :

Théorème VI. — *Dans le plan d'une cubique plane, il existe en général une infinité de points en ligne droite dont la conique polaire par rapport à la cubique soit une hyperbole équilatère.*

Dans le cas où les directions asymptotiques de la cubique sont parallèles aux côtés d'un triangle équilatéral, la droite qui vient d'être définie coïncide avec la droite de l'infini si les trois asymptotes ne sont pas concourantes.

Si les trois asymptotes de la cubique sont dirigées suivant les rayons d'un hexagone régulier, la conique polaire, par rapport à la cubique, de tout point du plan est une hyperbole équilatère.

VII. Problème V. — *Une cubique plane étant donnée, déterminer les régions de son plan dont les points aient pour première polaire par rapport à la cubique une ellipse ou une hyperbole et les points*

---

[1] Ce résultat est d'ailleurs évident en se reportant à ce qui a été établi plus haut : il y a au moins un point dont la première polaire soit un cercle ; or, ce point doit également avoir pour polaire une hyperbole équilatère. Ces deux conditions ne sont compatibles que si cette polaire se réduit à deux droites, dont celle de l'infini, c'est-à-dire si le point en question est un point central, puisque dans le cas actuel les directions asymptotiques sont simples.

du plan dont la première polaire soit une parabole.

Choisissons un système de coordonnées cartésiennes quelconques, et soient

$$(1)\quad f(xy) \equiv ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 + 3(ex^2 + 2gxy + hy^2) + 3(kx + ly) - p = 0$$

l'équation de la cubique plane étudiée et α, β les coordonnées d'un point P. La conique polaire de ce point sera une ellipse si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta}\right)^2 > 0,$$

une hyperbole si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta}\right)^2 < 0.$$

une parabole si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta}\right)^2 = 0.$$

Nous savons qu'il y a dans le plan au moins un point à première polaire circulaire et une infinité de points dont la première polaire soit une hyperbole équilatère. Si donc la polaire circulaire ne dégénère pas en deux droites, dont celle de l'infini, il y aura nécessairement dans le plan deux régions, une dont les points ont une polaire du genre ellipse et l'autre du genre hyperbole. Le cas d'exception possible correspond à l'existence d'un point central, ou d'un point inflexionnel parabolique, ou d'un point double à l'infini.

Dans ces conditions, le système d'équations

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

mises sous forme homogène admet une solution autre que $x = y = z = 0$, et les trois formes $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ne sont pas indépendantes. Par suite, la conique lieu des points à polaire parabolique

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$

se réduit à deux droites. Inversement, si l'une des singularités visées plus haut ne se présente pas, les formes $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sont indépendantes et la conique (2) n'est pas dégénérée.

En rapprochant ces considérations des résultats du problème II, on obtient la proposition suivante :

THÉORÈME VII. — *Le lieu des points du plan dont la conique polaire est une parabole est une conique réelle ou dégénérée. La dégénérescence en deux droites réelles ou imaginaires se produit lorsque la cubique possède soit un point central, soit un point double à l'infini ou un point d'inflexion parabolique.*

Cette conique divise le plan en deux régions dans chacune desquelles tous les points ont des coniques polaires appartenant au même genre.

Genre de la séparatrice. — En développant l'équation (2), on trouve sans aucune difficulté que la séparatrice sera du *genre ellipse* si

$$(ad - bc)^2 - 4(bd - c^2)(ac - b^2) < 0,$$

du *genre hyperbole* si

$$(ad - bc)^2 - 4(bd - c^2)(ac - b^2) > 0,$$

du *genre parabole* si

$$(ad - bc)^2 - 4(bd - c^2)(ac - b^2) = 0.$$

Si l'on remarque que le premier membre des relations précédentes est précisément le discriminant de la forme

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

on conclut immédiatement que :

La séparatrice est du genre ellipse lorsque la cubique possède trois directions asymptotiques simples réelles. Elle est du genre hyperbole si la cubique admet trois directions asymptotiques simples dont une seule réelle, du genre parabole si la cubique possède une direction asymptotique double.

Cas où la séparatrice se réduit à deux droites. — Nous passerons rapidement en revue les diverses hypothèses dans lesquelles cette dégénérescence peut se présenter.

1° *Cubique à point central.* — La séparatrice se réduit à deux droites se coupant en ce point. Ces droites sont réelles si la cubique ne présente qu'une seule direction asymptotique réelle ; elles sont imaginaires lorsque les trois directions asymptotiques de la cubique sont réelles. Dans ce dernier cas, la conique polaire d'un point quelconque du plan est du genre hyperbole.

2° *Cubique possédant à l'infini un point double.* — En prenant l'axe des x parallèle à la direction asymptotique double, on arrive, par des calculs faciles et que je laisse au lecteur le soin de développer, au résultat suivant :

Le lieu des points dont la conique polaire est du

genre parabole se réduit à une droite double parallèle à la direction asymptotique double. Cette droite est rejetée à l'infini si le point double de la cubique possède une branche parabolique. La polaire de tout autre point du plan est une hyperbole.

Toutefois, *si ce point double à l'infini est un rebroussement parabolique, la polaire de tout point du plan est du genre parabole.*

3° *Cubique possédant un point simple parabolique et inflexionnel.* — Avec le même choix d'axes que dans le paragraphe précédent, on met facilement en évidence le résultat suivant :

La séparatrice se réduit à une droite simple. Mais le lieu des points dont la première polaire est du genre parabole comprend en outre la droite de l'infini (dont le rôle comme séparatrice est évidemment nul).

VIII. Pour mémoire, je me bornerai à rappeler la propriété classique suivante :

Le lieu des points du plan d'une cubique plane dont la première polaire se réduit à deux droites est la hessienne de la cubique.

IX. *Applications.* — 1. Les résultats signalés dans les études précédentes donnent immédiatement la solution des questions suivantes :

Examiner s'il existe dans le plan d'une cubique donnée et, s'il y a lieu, déterminer le nombre et la position des points satisfaisant à l'une des conditions suivantes :

1° *Les points de contact des tangentes à la cubique issues du point considéré se trouvent sur deux*

droites; cas où l'une de ces droites doit être la droite de l'infini;

2° *Ces points de contact se trouvent sur un cercle;*

3° *Ces points de contact se trouvent sur une hyperbole équilatère;*

4° *Ces points de contact se trouvent sur une parabole.*

2. En combinant les divers résultats obtenus, on obtient la proposition suivante :

Théorème VIII. — *Il existe en général dans le plan d'une cubique plane :*

1° *Trois points en général distincts, dont un au moins réel, dont la première polaire se réduit à deux droites rectangulaires;*

2° *Six points réels ou imaginaires distincts en général, dont la première polaire se réduit à deux droites parallèles.*

Remarque. — Nous laissons au lecteur le soin de discuter dans quels cas le théorème précédent est en défaut et de modifier convenablement son énoncé.

3. Pour terminer cet exposé, il me paraît intéressant de présenter un exemple de cubique possédant les principales particularités signalées dans le cours de notre étude. J'adopterai la courbe représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation

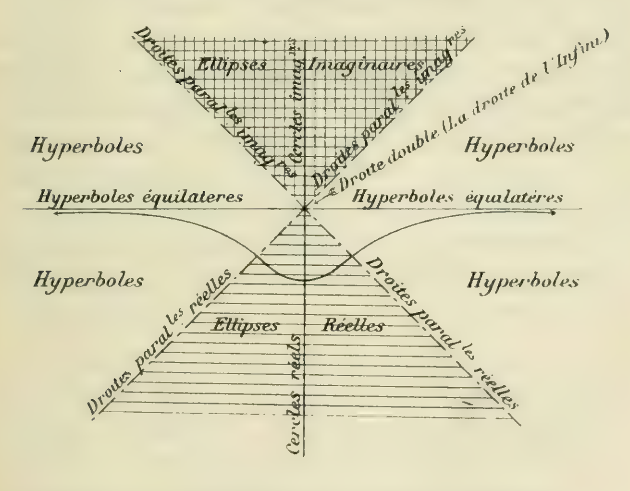
$$y^3 - 3x^2y - 1 = 0.$$

Elle jouit des propriétés suivantes que je ne m'arrêterai pas à établir :

1° Sa hessienne se réduit aux deux bissectrices des axes et à la droite de l'infini.

2° La conique polaire se réduit à un cercle pour tous les points de l'axe Oy, à une hyperbole équilatère pour ceux de Ox, à deux droites parallèles pour chacun des points des deux bissectrices, ces deux droites formant ainsi la séparatrice. L'origine est un point central ; la polaire correspondante se réduira à une droite double, la droite de l'infini. Tous ces résultats peuvent s'obtenir par application des propositions générales rencontrées précédemment ou encore se vérifier directement sur l'équation de la polaire d'un point P (x_0, y_0) :

$$(x^2 + y^2) y_0 + 2xyx_0 + 1 = 0.$$



La figure ci-dessus résume toute la discussion.

[K10e]

SUR L'APPLICATION DES DÉTERMINANTS A LA GÉOMÉTRIE;

PAR M. J. JUHEL-RÉNOY.

Dans une Note communiquée au *Bulletin des Sciences mathématiques élémentaires*, j'ai démontré le principe suivant :

PRINCIPE. — *Si une relation entière et rationnelle de degré n entre les distances d'un point variable* M *d'un cercle orienté à un certain nombre de points fixes, pris sur ce cercle ou dans son plan, telle que les degrés de tous ses termes par rapport aux distances variables aient la même parité et soient pairs par rapport aux distances aux points fixes non situés sur le cercle, est satisfaite pour* $(n+1)$ *positions, au moins, du point variable sur le cercle, elle est vraie pour une position quelconque du point sur le cercle orienté.*

Le but de la Note actuelle est l'application de ce principe à la démonstration des relations entre les distances mutuelles de n points d'un cercle à n points pris dans son plan, en particulier entre les distances respectives de n points d'un cercle, relation qui s'obtient d'habitude par la multiplication des déterminants dans le cas très spécial de quatre points. A ce sujet, l'application du principe nous permettra de démontrer que le degré de la relation connue peut être singulièrement abaissé, tout en conservant à cette relation sa forme habituelle; enfin, elle nous permettra d'atteindre des propositions plus étendues.

I. Considérons n points d'un cercle, $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_{n-1}, O_n$ et n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formant un autre groupe sur le même cercle. Nous nous proposons de démontrer qu'il existe, entre les distances mutuelles des points des deux groupes, la relation

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} O_1A_1 & O_1A_2 & O_1A_3 & \ldots & O_1A_n \\ O_2A_1 & O_2A_2 & O_2A_3 & \ldots & O_2A_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ O_nA_1 & O_nA_2 & O_nA_3 & \ldots & O_nA_n \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, si l'on veut déterminer le point O_n, connaissant tous les autres par la relation donnée, *qui remplit toutes les conditions de l'énoncé*, étant homogène par rapport aux distances variables, on trouve qu'étant linéaire elle est vérifiée lorsque le point O_n se confond avec l'un des points $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_{n-1}$, c'est-à-dire pour $n-1$ positions du point variable. Elle est donc identique, en supposant $n - 1 \geqq 2$ ou $n \geqq 3$.

Si l'on suppose, en particulier, que les points A se confondent respectivement avec les points O, on a une relation entre les distances mutuelles de n points d'un cercle sous la forme

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} 0 & A_1A_2 & A_1A_3 & \ldots & A_1A_n \\ A_2A_1 & 0 & A_2A_3 & \ldots & A_2A_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ A_nA_1 & A_nA_2 & A_nA_3 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

relation dans laquelle il est bien entendu que

$$A_iA_k = - A_kA_i.$$

Dans le cas de $n = 4$, on a la condition pour que quatre points soient sur un même cercle ; on voit que, si l'on convient d'écrire

$$A_iA_k = d_{ik},$$

elle affecte la forme suivante :

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

curieuse en ce qu'elle est identique à *la forme* qu'on donne d'habitude et qui est due, d'après M. Salmon, à M. Cayley, tout en présentant avec cette relation la différence essentielle que dans la relation (3) d_{ik} représente *la distance* algébrique $A_i A_k$, et non son carré, comme dans la relation de M. Cayley : c'est l'expression même du théorème de Ptolémée.

On généralise immédiatement la relation (1) en l'étendant aux puissances p des distances mutuelles, ce qui donne la relation

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \overline{O_1 A_1}^p & \overline{O_1 A_2}^p & \overline{O_1 A_3}^p & \ldots & \overline{O_1 A_n}^p \\ \overline{O_2 A_1}^p & \overline{O_2 A_2}^p & \overline{O_2 A_3}^p & \ldots & \overline{O_2 A_n}^p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{O_n A_1}^p & \overline{O_n A_2}^p & \overline{O_n A_3}^p & \ldots & \overline{O_n A_n}^p \end{vmatrix} = 0.$$

Il suffit, pour l'exactitude de cette relation, que $(n-1)$ soit au moins égal à $(p+1)$, ou

$$n \leqq p + 2.$$

La démonstration découle immédiatement de l'application du principe.

En particulier, la formule (3) applicable à quatre points d'un cercle donne la généralisation suivante :

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} 0 & (d_{12})^p & (d_{13})^p & (d_{14})^p \\ (d_{21})^p & 0 & (d_{23})^p & (d_{24})^p \\ (d_{31})^p & (d_{32})^p & 0 & (d_{34})^p \\ (d_{41})^p & (d_{42})^p & (d_{43})^p & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

avec la condition

$$4 \geqq p + 2$$

ou

$$p \leqq 2.$$

Le cas de $p = 2$ donne la formule de M. Cayley.

II. Considérons n cercles ayant pour rayons r_1, r_2, r_3, ..., r_n, et tangents à un $(n+1)^{\text{ième}}$ cercle en des points A_1, A_2, A_3, ..., A_n, ce dernier cercle ayant pour rayon R.

On démontre bien facilement (*voir* Salmon, *Sections coniques*, Chapitre des *Systèmes de cercles*) qu'en représentant par $(i\mathrm{K})$ la valeur algébrique de la tangente commune au $i^{\text{ième}}$ et au $k^{\text{ième}}$ cercle, on a

$$A_i A_k = \frac{\mathrm{R}\,(ik)}{\sqrt{(\mathrm{R} - r_i)(\mathrm{R} - r_k)}}.$$

En remplaçant dans la relation (2) $A_i A_k$ par cette expression, on a une relation entre les tangentes communes à n cercles, pris deux à deux, tangents à un $(n+1)^{\text{ième}}$ cercle :

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} 0 & (12) & (13) & (1n) \\ (21) & 0 & (23) & (2n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n1) & (n2) & (n3) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

La relation (5) permet une application analogue ; en particulier, dans le cas de quatre cercles tangents à un cinquième, elle devient

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} 0 & (12)^p & (13)^p & (14)^p \\ (21)^p & 0 & (23)^p & (24)^p \\ (31)^p & (32)^p & 0 & (34)^p \\ (41)^p & (42)^p & (43)^p & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

en supposant p égal à 2 ou à 1. On trouve ainsi le

théorème bien connu de M. Casey. La forme qui correspond au cas de $p = 2$ se trouve dans l'Ouvrage de M. Salmon (*loc. cit.*).

III. Considérons actuellement n points d'un cercle $O_1, O_2, \ldots, O_n$ et n points dans le plan du cercle $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Il existe, entre les distances mutuelles des points du groupe O aux points du groupe A, la relation

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} \overline{O_1A_1}^2 & \overline{O_1A_2}^2 & \overline{O_1A_3}^2 & \cdots & \overline{O_1A_n}^2 \\ \overline{O_2A_1}^2 & \overline{O_2A_2}^2 & \overline{O_2A_3}^2 & \cdots & \overline{O_2A_n}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{O_nA_1}^2 & \overline{O_nA_2}^2 & \overline{O_nA_3}^2 & \cdots & \overline{O_nA_n}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

La démonstration est immédiate, la relation homogène et *du second degré* par rapport aux distances du point O_n aux n points A étant vérifiée pour $(n-1)$ positions du point O_n, supposé placé successivement en $O_1, O_2, \ldots, O_{n-1}$.

Le cas particulier de $n = 4$ a été indiqué par Antomari dans les *Nouvelles Annales* (3e série, t. I).

Si l'on suppose que O_1 coïncide avec A_1, O_2 avec A_2, ainsi de suite, on obtient une relation entre les distances mutuelles de n points d'un cercle

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} 0 & A_1A_2 & A_1A_3 & \cdots & A_1A_n \\ A_2A_1 & 0 & A_2A_3 & \cdots & A_2A_n \\ A_3A_1 & A_3A_2 & 0 & \cdots & A_3A_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_nA_1 & A_nA_2 & A_nA_3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

qui est, d'ailleurs, un cas particulier de l'équation (4).

Signalons encore la généralisation suivante de la relation (8), tout à fait analogue à l'équation (4), avec

cette hypothèse que p est nécessairement pair :

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} \overline{O_1A_1}^p & \overline{O_1A_2}^p & \overline{O_1A_3}^p & \dots & \overline{O_1A_n}^p \\ \overline{O_2A_1}^p & \overline{O_2A_2}^p & \overline{O_2A_3}^p & \dots & \overline{O_2A_n}^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{O_nA_1}^p & \overline{O_nA_2}^p & \overline{O_nA_3}^p & \dots & \overline{O_nA_n}^p \end{vmatrix} = 0.$$

IV. Remarquons, en terminant, que la simplification apportée par la relation (3), à la condition pour que quatre points soient sur un même cercle, s'applique aussi à la condition pour que trois points soient en ligne droite.

En effet, soient, sur un axe orienté, deux groupes de trois points M, N, P et A, B, C. On a, entre leurs distances mutuelles, la relation

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} MA & MB & MC & 1 \\ NA & NB & NC & 1 \\ PA & PB & PC & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

qui devient, en supposant les points M, N, P confondus respectivement avec A, B, C,

$$\begin{vmatrix} 0 & AB & AC & 1 \\ BA & 0 & BC & 1 \\ CA & CB & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou encore

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & 1 \\ d_{21} & 0 & d_{23} & 1 \\ d_{31} & d_{32} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

[I23a]

CONTINUANTS : APPLICATIONS A LA THÉORIE DES NOMBRES ;

PAR M. A. DELTOUR.

(SUITE.)

DEUXIÈME PARTIE.

CONTINUANTS ENTIERS.

OBJET ET DÉFINITIONS.

44. Les relations algébriques établies au cours de la première Partie seront appliquées dans celle-ci au cas où tous les éléments sont des nombres entiers et seront développées au point de vue arithmétique.

Nous appellerons *continuants entiers* ceux dont tous les éléments sont des nombres entiers, ces continuants étant toujours supposés normaux, sauf indication contraire.

Les continuants entiers, dont tous les éléments ont le même signe et sont différents de o, seront dits *positifs* ou *négatifs*, suivant le signe des éléments.

Parmi eux, il faut distinguer les continuants *courts*, dont le dernier élément est différent de ± 1 (les éléments étant ordonnés de gauche à droite) et les continuants *longs*, dont le dernier élément est ± 1.

Un continuant court, dont le premier élément est différent de ± 1, sera dit *réduit*.

Par exemple,

$$(4, 6, 9) \quad (1, 3, 6, 9)$$

sont des continuants courts dont le premier est réduit;

$$(4, 6, 8, 1) \quad (1, 3, 6, 8, 1)$$

sont des continuants longs.

Ces quatre continuants représentent le même nombre 229.

On admettra que (α) et $(\underline{\alpha})$ sont des continuants distincts.

$(\alpha_{1,0})$ sera dit *résidu* de (α),

$(\alpha_{0,1})$ *résidu inverse.*

45. Il est évident que la valeur d'un continuant entier est un nombre entier et celle d'un continuant positif un nombre positif.

Mais, inversement, un nombre entier $\pm$ N est représenté par un nombre illimité de continuants.

Les procédés de transformation indiqués dans la première Partie vont servir à passer d'une représentation quelconque de $\pm$ N à une autre en les réduisant d'abord toutes deux à des continuants positifs qui, eux-mêmes, se déduisent ensuite l'un de l'autre.

RAPPORTS $\frac{(\alpha)}{(\alpha_{1,0})}$, $\frac{(\alpha)}{(\alpha_{0,1})}$.

46. *Le nombre* N, *représenté par un continuant* (α), *est premier avec les nombres* R, R', *représentés par* $(\alpha_{1,0})$, $(\alpha_{0,1})$.

Cela résulte de la relation (VI) (n° 19) et constitue une propriété essentielle des continuants entiers.

Remarque. — De la relation (VI) résulte aussi la congruence

$$RR' \equiv (-1)^{n_\alpha+1} \pmod{N}.$$

Pour $R = 0$, on a nécessairement

$$N = \pm 1.$$

47. *La valeur de* $\frac{(\alpha)}{(\alpha_{1,0})}$ *ne change pas lorsqu'on*

applique à $(\alpha_{1,0})$ *les procédés de transformation suivants :*

1° Introduction, soit entre deux éléments, soit avant le premier, soit après le dernier, de suites des types θ, θ' (n° 11), ou des types η, η', en changeant les signes des éléments qui suivent η ou η' (n° 11), ou du type $i\lambda'$, suivant la notation du n° 31, pour les continuants alternés.

2° Équivalence de a et de b, o, c, lorsqu'on a $a = b + c$ (n° 14).

Il est facile de vérifier l'exactitude de ces propositions et d'en énoncer d'analogues pour le rapport $\frac{(\alpha)}{(\alpha_{0,1})}$.

Remarques. — 1° Pour calculer la valeur d'un continuant où figurent des suites η', il faut se reporter aux indications du n° 11.

Soient (α') un continuant où figurent p suites η', (α) le même continuant où les suites η' sont remplacées par des suites η ; on a

$$(\alpha') = (-1)^p (\alpha).$$

2° La valeur de $\frac{(\alpha)}{(\alpha_{1,0})}$ change de signe lorsqu'on introduit, comme il a été indiqué, des suites η, η', mais en changeant les signes des éléments qui *précèdent* η ou η'.

3° Parmi les suites $i\lambda'$, on aura à considérer principalement les suites

$$(o, i, i, i, o) \quad (o - i - i - i - o) \quad (i, i, i) \quad (-i, -i, -i),$$

qui seront désignées respectivement par

$$\mathrm{I} \quad -\mathrm{I} \quad \mathrm{I}_{1,1} \quad -\mathrm{I}_{1,1}.$$

48. *Lorsqu'on passe d'un continuant* (α) *au continuant alterné* $(i\alpha')$ *au moyen de la relation* (IX) $i^{n_\alpha^2}(\alpha) = (i\alpha')$ (*n*° **30**, *Remarque*), *on a*

$$\frac{(\alpha)}{(\alpha_{1,0})} = -i\frac{(i\alpha')}{(i\alpha'_{1,0})}.$$

En effet, cette relation résulte des deux suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} i^{n_\alpha^2}(\alpha) &= (i\alpha'),\\ i^{(n_\alpha-1)^2}(\alpha_{1,0}) &= (-1)^{n_\alpha-1}(i\alpha'_{1,0}).\end{aligned}\right.$$

49. *Si* (α) *est positif et de valeur* N, *les valeurs* R, R' *de* $(\alpha_{1,0})$ *et* $(\alpha_{0,1})$ *sont au plus égales* à N.

En effet, a_1 étant le premier élément de (α), on a (n° 5)

$$(\alpha) = a_1(\alpha_{1,0}) + (\alpha_{2,0}),$$

relation où tous les termes sont positifs. Le minimum de a_1 est 1, celui de $(\alpha_{2,0})$ est 0, donc $(\alpha) \geqq (\alpha_{1,0})$.

On trouvera de même $(\alpha) \geqq (\alpha_{0,1})$.

Remarque. — On a toujours $(\alpha) > (\alpha_{1,0})$, sauf pour les valeurs particulières

$$\left\{\begin{aligned} a_1 &= 1,\\ (\alpha_{2,0}) &= 0,\end{aligned}\right.$$

qui donnent $N = (\alpha) = (\alpha_{1,0})$.

Dans ce cas, (α) se réduit à (1).

NOMBRE DE CONTINUANTS POSITIFS D'UNE VALEUR DONNÉE.

50. *Le nombre de représentations de* N *par des continuants courts positifs est* φ (N), φ (N) *étant l'indicateur.*

Lorsqu'on développe une fraction irréductible $\frac{N}{R}$ (N et R positifs, $R < N$) en fraction continue, on obtient chaque quotient incomplet par une division dont tous les termes peuvent être identifiés avec ceux de la formule de récurrence donnée au n° 5, en supposant les continuants positifs, savoir

$$(a, \beta) = a(\beta) + (\beta_{1,0}),$$

a étant le quotient et $(\beta_{1,0})$ le reste de la division de (a, β) par (β).

Ainsi, le quotient de la première division est le premier élément a d'un continuant et la suite des quotients incomplets obtenus n'est autre que celle des éléments d'un continuant positif (α), tel que

$$\begin{cases} (\alpha) = N, \\ (\alpha_{1,0}) = R. \end{cases}$$

Par son mode de formation, ce continuant est unique et diffère de celui qui proviendrait de toute autre fraction.

D'autre part, l'opération s'arrête dès que le reste devient égal à 1. Le dernier quotient incomplet est égal au reste de l'avant-dernière division et, par conséquent, supérieur à 1 ;

(α) est donc un continuant court.

Par exemple, pour la fraction $\frac{N}{R} = \frac{27}{10}$, on trouve $(\alpha) = (2, 1, 2, 3)$.

Réciproquement, un continuant court positif donné (α) provient d'une certaine fraction $\frac{N}{R}$, les éléments de l'un étant les quotients incomplets de l'autre.

Pour une valeur donnée de N, il existe, par conséquent, autant de continuants courts positifs distincts,

de valeur N, que de fractions irréductibles $\frac{N}{R}$, c'est-à-dire $\varphi(N)$.

Remarques. — 1° *Continuants réduits.* — Le premier élément de (α) est > 1 si $2R < N$.

Il y a donc $\frac{\varphi(N)}{2}$ continuants positifs réduits.

Exemple : $N = 11$.

$$R = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5,$$
$$(\alpha) = (11), (5, 2), (3, 1, 2), (2, 1, 3), (2, 5).$$

Au résidu R correspond un résidu R_1 tel que $R + R_1 = N$. Le continuant de la fraction $\frac{N}{R_1}$ commence par 1.

2° *Continuants positifs.* — A tout continuant court correspond un continuant long. Le nombre total des continuants positifs de valeur N est donc $2\varphi(N)$.

3° Les nombres n_α relatifs à deux continuants positifs, court et long, correspondants, sont de parité différente. S'il y a lieu de donner à $(-1)^{n_\alpha}$ un signe déterminé, on choisit l'un ou l'autre de ces deux continuants.

RÉDUCTION A UN CONTINUANT POSITIF.

51. *Les représentations de* $-N$ *se ramènent à celles de* $+N$.

En effet, soit $(\alpha, \beta) = -N$ une de ces représentations. On emploiera l'une ou l'autre des formules (T_4, n° 11), (T_6, n° 12), savoir :

$$(\alpha, \eta, -\beta) = (-1)^{n_\beta}(\alpha, \beta) = (-1)^{n_\beta+1} N,$$
$$(\alpha, \eta, 0, \eta, 0, \beta) = -(\alpha, \eta, \eta, 0, 0, \beta) = -(\alpha, \beta) = N.$$

Dans la première, on suppose que n_β est impair; dans la seconde, la suite $(\gamma_1, 0, \gamma_1, 0)$ se place dans un intervalle quelconque, ou même soit avant le premier, soit après le dernier élément.

52. *Élimination des éléments nuls.* — On passe d'une représentation (α) donnée de N à une représentation équivalente, n'ayant aucun élément égal à 0, par l'application répétée de la formule (T_8) du n° 14.

Remarque. — Si l'un des éléments extrêmes, le premier par exemple, est 0, on supprime les deux premiers éléments. Car on a, dans ce cas, d'après (I),

$$(\alpha) = (\alpha_{2,0}).$$

Dans cette nouvelle représentation $(\alpha_{2,0})$, le résidu R est modifié et devient $R_1 = (\alpha_{3,0})$.

De la relation

$$(\alpha_{1,0}) = \alpha_2 (\alpha_{2,0}) + (\alpha_{3,0}),$$

on déduit

$$R_1 \equiv R \pmod{N}.$$

53. *Élimination des éléments égaux à* ± 1. — Le continuant (α) étant supposé privé d'éléments nuls, multiplions-le par $i^{n_\alpha^2}$ et mettons-le sous forme de continuant alterné $(i\,\alpha')$ (n° 30).

On y supprime tous les éléments égaux à $\pm i$ par l'application répétée de la formule (X) du n° 31, savoir

$$(i\alpha, i\lambda', i\beta) = (i\lambda')(i\alpha, i\beta),$$

dans laquelle on fait $(i\lambda') = \pm I$ (n° 47, *Remarque* 3°).

On reconstitue ensuite le résultat sous forme de continuant normal équivalent au premier (α) en valeur absolue et ne contenant plus d'éléments égaux à ± 1.

Remarque. — Si l'un des éléments extrêmes de $(i\alpha')$, le premier par exemple, est $\pm i$, on le fait précéder au préalable de la suite $0, \pm i$, ce qui ne change pas la valeur du continuant.

Mais le résidu, qui était $R = (i\alpha'_{1,0})$, est modifié et devient

$$R_1 = (\pm i, i\alpha') = \pm i(i\alpha') + R.$$

On a donc

$$R_1 \equiv R \pmod N.$$

54. *Transformation en continuant positif.* — Le continuant étant formé comme il est expliqué au numéro précédent au moyen d'éléments $\geqq 2$ en valeur absolue, on change les signes des éléments négatifs en appliquant la formule (T_5) du n° **12** dans laquelle on fait

$$\eta = (0, -1, 1, -1, 0).$$

Par la suppression des 0 provenant des η, la valeur des éléments contigus à un seul η est diminuée d'une unité et celle des éléments compris entre deux η de deux unités.

Toute réduction faite, les nouveaux éléments sont tous positifs ou nuls, et par la suppression de ces derniers on obtient un continuant positif équivalent en valeur absolue au continuant donné.

Remarque. — Si le premier terme est négatif, on le fait précéder de η.

La valeur du continuant (α) n'est pas modifiée, mais il n'en est pas de même du résidu R, qui devient

$$R_1 = (\eta_{1,0}, \alpha) = -(\alpha_{1,0}) = -R.$$

55. *Exemple de réduction d'un continuant.* — Soit

$$(\alpha) = (0, 4, 2, -3, 5, 0, -6, 2, -4, -2).$$

On trouve
$$N = 67, \qquad R = 305.$$

Ce continuant passe par les transformations suivantes :

$$(0, 4, 2, -3, 5, 0, -6, 2, -4, -2)$$
$$(2, -3, -1, 2, -4, -2)$$
$$(2i, 3i, -i, -2i, -4i, 2i)$$
$$(2i, 4i, -i, -4i, 2i)$$
$$(2i, 5i, -3i, 2i)$$
$$(2, -5, -3, -2)$$
$$(\alpha_1) = (1, 1, 4, 3, 2).$$

On trouve, pour (α_1),
$$N = 67, \qquad R_1 = 37.$$

56. *Transformation d'un continuant donné* $(\alpha) = N$ *de résidu* R *en un continuant positif ou négatif de valeur* $N_1 = \pm N$ *et de résidu* R_1, *tel que* $\frac{N_1}{R_1} = \frac{N}{R}$.

Pour conserver au rapport $\frac{N}{R}$ sa valeur, on applique les procédés de transformation des nos 52, 53, 54 seulement aux éléments de $(\alpha_{1,0})$ dans les conditions indiquées au n° 47 et de manière à obtenir un continuant positif si $\frac{N}{R}$ est positif, négatif dans le cas contraire.

Revenons en détail sur chacune des opérations précédentes.

1° *Élimination des éléments nuls* (n° 52). — On conserve le premier élément, s'il est égal à 0.

2° *Élimination des éléments égaux à* ± 1 (n° 53). — En passant du continuant (α) au continuant alterné $(i\alpha')$, le rapport $\frac{N}{R}$ est multiplié par i (n° 48).

Inversement, en revenant à un continuant normal, il est divisé par i.

Entre ces deux opérations, sa valeur reste invariable lorsqu'on supprime des suites $\pm$ I (nº 47).

Donc, avant et après le passage par les continuants alternés, la valeur de $\frac{N}{R}$ est la même.

D'autre part, il y a lieu de remarquer que les suites $\pm$ I doivent être formées entre deux éléments quelconques du continuant, mais non avant le premier. Celui-ci a, par conséquent, une valeur quelconque après l'opération, y compris o, $\pm i$.

3º *Transformation en continuant positif ou négatif* (nº 54). — L'opération précédente amène un continuant $(\beta) = (b_1\ b_2\ \ldots)$ dont tous les éléments (le premier non compris) sont $\geqq 2$ en valeur absolue.

On place la première suite η ou η' entre les deux premiers éléments de signes contraires et l'on fait dans la formule (T_5) :

$$\eta = (0, -1, 1, -1, 0)$$

si le continuant commence par des éléments positifs,

$$\eta' = (0, 1, -1, 1, 0)$$

dans le cas contraire.

Si la première suite η ou η' est placée après b_2, on voit, comme au nº 54, que tous les éléments prennent le même signe, $+$ avec η, $-$ avec η', lorsqu'on introduit ces suites dans les conditions indiquées au nº 47.

Si la première suite η ou η' est placée entre b_1 et b_2, ce qui n'a lieu que lorsque b_1 est différent de o et au moins égal à 1 en valeur absolue, les éléments prennent encore le même signe. Le premier, étant contigu à un η ou à un η', peut devenir o.

Prenons comme exemple

$$(\alpha) = (0, -3, -2, 1, 4),$$

pour lequel on a

$$N = -6, \qquad R = 23.$$

Les transformations successives sont

$$\begin{gathered}(0, -3, -2, 1, 4) \\ (0, 3i, -2i, -i, 4i) \\ (0, 3i, -i, 5i) \\ (0, 4i, 6i) \\ (0, -4, 6) \\ (\alpha_1) = (0, -3, -1, -5).\end{gathered}$$

On a, pour (α_1),

$$N_1 = 6, \qquad R_1 = -23.$$

TRANSFORMATION DES CONTINUANTS POSITIFS ENTRE EUX.

57. Soient :

$(\alpha) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, ak)$ un continuant positif correspondant à $\frac{N}{R}$;

t un nombre premier positif non diviseur de N.

Cherchons le continuant positif ayant pour résidu un nombre congru à tR (mod N).

Supposons d'abord que t ne divise pas a_1 ; posons $a_m = b_m + c_m$ et écrivons (α) sous la forme

$$(\alpha) = (a_1, b_2, 0, c_2\, b_3, 0, c_3, \ldots, c_{h-1}, a_h, a_{h+1}, a_{h+2}, \ldots, a_{h+2l+1}, \ldots, a_k),$$

les éléments b et c, qui peuvent être positifs, nuls ou négatifs, étant déterminés de manière à satisfaire aux conditions suivantes [(T_{10}), n° 16], dans lesquelles $(\alpha^{(r)})$

représente les suites d'éléments sous parenthèse dans (α), et $(\beta^{(r)})$ de nouvelles suites :

$$\begin{cases} (a_1, b_2, 0) = (\alpha') \quad = (\beta'), \\ (a_1, b_2) \quad = (\alpha'_{0,1}) = t\,(\beta'_{0,1}), \\ (b_2, 0) \quad = (\alpha'_{1,0}) = \frac{1}{t}(\beta'_{1,0}), = 1, \\ (b_2) \quad = (\alpha'_{1,1}) = (\beta'_{1,1}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} (c_2, b_3, 0) = (\alpha'') \quad = (\beta''), \\ (c_2, b_3) \quad = (\alpha''_{0,1}) = t\,(\beta''_{0,1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Les éléments b et c doivent satisfaire à ces égalités jusqu'au premier élément c divisible par t, soit c_{h-1}.

Il est toujours possible de remplir ces conditions : en effet, d'après les première et troisième égalités, (β') est le continuant qui correspond à la fraction $\frac{a_1}{t}$, et l'on choisit celui pour lequel $n_{\beta'}$ est impair (n° 50, *Remarque* 3°).

La dernière égalité détermine b_2 qui est positif. La deuxième se trouve vérifiée comme conséquence des trois autres, en vertu de la relation (VI) (n° 19).

De la relation $a_2 = b_2 + c_2$ on tire ensuite la valeur de c_2. Puisque c_2 n'est pas divisible par t, par hypothèse, on opère avec c_2 comme avec a_1 pour satisfaire aux quatre égalités suivantes, et ainsi de suite.

Il faut observer que l'un des termes c_m peut être négatif. Dans ce cas, $(\beta^{(m)})$ sera le continuant correspondant à la fraction $\frac{-c_m}{t}$ dans lequel tous les éléments seront pris négativement : b_{m+1} sera alors négatif. Ainsi, c_m et b_{m+1} sont toujours de même signe.

On pose ensuite

$$\begin{cases} c_{h-1} = t\,c'_{h-1}, \\ a_h \quad = \frac{1}{t}\,a'_h. \end{cases}$$

ce qui donne

$$(c_{h-1}, a_h) = (c'_{h-1}, a'_h).$$

On voit que ces deux derniers continuants que nous désignerons respectivement par (γ), (δ) satisfont aux conditions (T_{10}) :

$$\begin{cases} (\gamma) = (\delta), \\ (\gamma_{0,1}) = t\,(\delta_{0,1}), \\ (\gamma_{1,0}) = \dfrac{1}{t}\,(\delta_{1,0}), \\ (\gamma_{1,1}) = (\delta_{1,1}) = 1. \end{cases}$$

Supposons que $a_{h+1}, a_{h+3}, a_{h+5}, \ldots,$ jusqu'à a_{h+2l+1} exclusivement, soient encore divisibles par t.

On pose de même

$$\begin{cases} a_{h+1} = t\,a'_{h+1}, \\ a_{h+2} = \dfrac{1}{t}\,a'_{h+2}. \end{cases}$$

On a encore deux continuants

$$(\gamma') = (a_{h+1}, a_{h+2}),$$
$$(\delta') = (a'_{h+1}, a'_{h+2}),$$

satisfaisant aux conditions (T_{10}) et ainsi de suite jusqu'à

$$(a_{h+2l-1},\ a_{h+2l}).$$

On forme alors à partir de a_{h+2l+1} une nouvelle série d'éléments analogue à celle obtenue en partant de a_1.

A la fin de l'opération, on arrive à une suite de trois éléments $(\alpha^{(r)})$ ou de deux éléments $(\gamma^{(s)})$ précédant immédiatement, soit a_k, soit a_{k-1}, a_k, soit c_{k-1}, a_k.

Dans le premier cas, a_k n'est pas divisible par t, car les éléments qui le précèdent constituent un conti-

nuant (ε) composé de parties (α') (α'') ... (γ) (γ') ... satisfaisant aux conditions (T_{10}) et, par conséquent, ($\varepsilon_{0,1}$) a pour facteur t (nº 16).

Or, on a

$$N = (\varepsilon, a_k) = a_k(\varepsilon) + (\varepsilon_{0,1}).$$

Si a_k était divisible par t, N le serait aussi, contrairement à l'hypothèse.

Le continuant est alors terminé par la suite

$$\overbrace{a_k, b_{k+1}, 0}.$$

Dans les deux derniers cas, le continuant est terminé par l'une des suites

$$\overbrace{a_{k-1}, a_k} \quad \text{ou} \quad \overbrace{c_{k-1}, a_k},$$

si a_{k-1}, c_{k-1} sont divisibles par t, et par

$$\overbrace{a_{k-1}, b_k, 0}, \overbrace{c_k, b_{k+1}, 0}, \quad \text{ou} \quad \overbrace{c_{k-1}, b_k, 0}, \overbrace{c_k, b_{k+1}, 0},$$

s'ils ne le sont pas, puisque c_k, pour la même raison que a_k dans le premier cas, ne peut pas être divisible par t.

Finalement, on obtient deux continuants

$$(\alpha) = (\alpha', \alpha'', \ldots, \gamma, \gamma', \ldots),$$
$$(\beta) = (\beta', \beta'', \ldots, \delta, \delta', \ldots),$$

qui satisfont aux conditions (T_{10}), comme les suites qui les composent, savoir :

$$\begin{cases} (\alpha) \quad = (\beta), \\ (\alpha_{0,1}) = t\,(\beta_{0,1}), \\ (\alpha_{1,0}) = \dfrac{1}{t}(\beta_{1,0}), \\ (\alpha_{1,1}) = (\beta_{1,1}). \end{cases}$$

On a donc

$$(\beta) = N, \qquad (\beta_{1,0}) = tR.$$

Il ne reste plus qu'à réduire (β) en continuant positif.

On a admis au début que a_1 était premier avec t. Si t divise a_1, on commence l'opération comme si le premier élément était a_{h+1}.

Remarque. — Le continuant donné était supposé positif. Il est facile de voir qu'on obtiendrait une transformation semblable avec un continuant entier quelconque.

58. *Cas où t est un nombre quelconque premier avec* N.

Pour passer d'un continuant de résidu R à un continuant de résidu congru à tR, lorsque t n'est pas un nombre premier, le procédé du n° 57 est encore applicable si le plus grand commun diviseur de t et de chacun des éléments $a_{(m)}$ ou $c_{(m)}$ est toujours 1 ou t. Dans le cas contraire, on l'applique successivement à chacun des facteurs dont t est le produit et pour lesquels l'opération est possible, ce qui a lieu, en particulier, pour les facteurs premiers de t.

Si t est une racine de la congruence

$$x^d - 1 \equiv 0 \pmod{N},$$

d étant un diviseur de $\varphi(N)$, on retrouve le continuant donné après d opérations.

Lorsque t est une racine primitive de N, *on obtient tous les continuants positifs de valeur* N, *au moyen de* $\varphi(N)$ *opérations.*

59. *Application à quelques cas particuliers.*

1° Soit $t = 2$.

Les suites $(\alpha^{(r)})$, $(\gamma^{(s)})$, qui composent (α) (n° 57), sont respectivement de la forme

$$(2m+1, 1), \quad (2p, q)$$

Les suites correspondantes $(\beta^{(r)})$, $(\delta^{(s)})$ de (β) sont

$$(m, 1, 1), \quad (p, 2q).$$

Soit, par exemple,

$$(\alpha) = (4, 1, 1, 8), \quad N = 77, \quad R = 17.$$

Ce continuant devient

$$(\alpha) = (\overbrace{4, 1}, \overbrace{1, 1, 0}, \overbrace{7, 1, 0}),$$

d'où

$$(\beta) = (\overbrace{2, 2}, \overbrace{0, 1, 1}, \overbrace{3, 1, 1})$$
$$= (2, 3, 1, 3, 2).$$
$$R_1 = 34.$$

2° Soit $t = 3$.

On a, pour $(\alpha^{(r)})$, $(\gamma^{(s)})$, les suites

$$(3m+1, 2, 0), \quad (3m+2, 1, 0), \quad (3p, q),$$

auxquelles correspondent dans (β)

$$(m, 2, 1), \quad (m, 1, 2), \quad (p, 3q).$$

Pour les mêmes valeurs, $N = 77$, $R = 17$, (α) devient

$$(\alpha) = (\overbrace{4, 2, 0}, \overbrace{-1, -2, 0}, \overbrace{3, 8}),$$

d'où

$$(\beta) = (\overbrace{1, 2, 1}, \overbrace{0, -2, -1}, \overbrace{1, 24}).$$

Pour réduire (β) en continuant positif, on passe par

les transformations suivantes :

$$(1, 2, -1, -1, 1, 24)$$
$$(i, -2i, -i, i, i, -24i)$$
$$(i, -2i, -2i, 0, -24i)$$
$$(i, -2i, -26i)$$
$$(1, 2, -26)$$
$$(1, 1, 1, 25).$$
$$R_1 = 51.$$

3° Soit $t = 13$.

Pour les mêmes valeurs de N et de R, on a

$$(\alpha) = (\overbrace{4, 3, 0,}\ \overbrace{-2, -6, 0,}\ \overbrace{7, 11, 0,}\ \overbrace{-3, -4, 0}),$$
$$(\beta) = (\overbrace{0, 3, 4,}\ \overbrace{0, -6, -2,}\ \overbrace{0, 1, 1, 5, 1,}\ \overbrace{0, -4, -3}),$$
$$= (0, 3, -2, -1, 1, 5, -3, -3).$$

Transformé en continuant positif, (β) devient

$$(0, 2, 1, 6, 1, 2, 3).$$
$$R_1 = 221 = 13.17.$$

4° Soit $N = 11$.

Formons ses continuants positifs réduits au moyen de la racine primitive $t = 2$.

R.	(β).		(α).		(α).
1.....			(11)	=	(10, 1)
2.....	(5, 2)	=	(5, 2)	=	(5, 1, 0, 1, 1, 0)
3.....	(2, 1, 1, 0, 1, 1)	=	(2, 1, 3)	=	(2, 1, 2, 1)
4.....	(1, 2, 1, 2)	=	(3, 1, 2)	=	(3, 1, 0, 0, 2)
5.....	(1, 1, 1, 0, 4)	=	(2, 5)	=	(2, 5)
6.....	(1, 10)	=	(11)		

MULTIPLICATION ET DIVISION D'UN CONTINUANT PAR UN NOMBRE DONNÉ.

60. *Caractère de divisibilité d'un continuant par un nombre donné.*

Comme on l'a vu au nº 57, la condition nécessaire et suffisante pour que t divise N (t étant premier), est qu'à la fin de l'opération a_k ou c_k soit divisible par t.

On voit facilement qu'il en est de même pour un nombre t quelconque, premier ou non, pourvu que l'opération soit possible.

Plus généralement, si N est mis sous la forme d'un continuant $(\varepsilon, \varepsilon')$ où, (ε') étant quelconque, (ε) satisfait aux conditions T_{10}; où, par conséquent, $(\varepsilon_{0,1})$ est divisible par t et (ε) est premier avec t (t étant premier ou non), on a

$$(\varepsilon, \varepsilon') \equiv (\varepsilon)(\varepsilon') \equiv \text{N} \pmod{t}.$$

Donc, pour que N soit divisible par t, il faut et il suffit qu'on ait

$$(\varepsilon') \equiv 0 \pmod{t}.$$

Si cette condition n'est pas satisfaite et si N est premier avec t, on a, suivant la notation du nº 57, en supposant la formule applicable à t,

$$\text{N} = (\alpha) = (\alpha', \alpha'', \ldots, \gamma, \gamma', \ldots).$$

Comme tous les résidus inverses $(\alpha'_{0,1}), \ldots, (\gamma_{0,1})$, ... sont divisibles par t, on voit facilement (II, nº 6) qu'on a

$$\text{N} \equiv (\alpha')(\alpha'') \ldots (\gamma)(\gamma') \ldots \pmod{t},$$

c'est-à-dire

$$\text{N} \equiv a_1 c_2 c_3 \ldots c_{h-2} \cdot 1 \cdot 1 \ldots \pmod{t}$$

61. La transformation du nº 57 permet de *multiplier* un continuant donné (λ) par un nombre quelconque, en opérant successivement avec tous les facteurs premiers t qui composent ce nombre.

Posons à cet effet $(m, \lambda) = (\alpha)$ et déterminons m de telle sorte que t soit premier avec (α) en faisant, par exemple, $m = 0$ si t est premier avec $(\lambda_{1,0})$, $m = 1$ dans le cas contraire.

On cherche le continuant (β) correspondant à (α) (suivant la notation du n° 57) et on le réduit à un continuant positif (β') en conservant la valeur de $\frac{(\beta)}{(\beta_{1,0})}$.

Le résidu $(\beta'_{1,0})$ de ce dernier a pour valeur le produit $t(\lambda)$.

62. Pour *diviser* (λ) par un de ses diviseurs t, on opère de la même manière sur $(\lambda, m) = (\alpha)$. Quel que soit m, t est premier avec (α). On réduit (β), correspondant à (α), à un continuant positif (β') en conservant la valeur de $\frac{(\beta)}{(\beta_{0,1})}$. Le quotient $\frac{(\lambda)}{t}$ est représenté par le résidu inverse $(\beta'_{0,1})$ du dernier continuant obtenu. (*A suivre.*)

BIBLIOGRAPHIE.

Tables de caractéristiques relatives a la base 2310 des facteurs premiers d'un nombre inférieur a 30030, par *Ernest Lebon*, agrégé de l'Université, Membre des Académies de Lisbonne et de Metz. Paris. Delalain frères, 1er mars 1906. Prix : 1fr,50.

(Cet Opuscule a été honoré d'une subvention de l'Association française pour l'avancement des sciences et présenté à l'Académie des Sciences par M. Eugène Rouché.)

En s'appuyant sur des propriétés non encore signalées de certaines progressions arithmétiques, M. E. Lebon est arrivé à construire une Table donnant très rapidement la solution

du double problème suivant : *Un nombre étant donné, reconnaître s'il est premier ou composé et, dans le dernier cas, trouver ses facteurs premiers.* M. E. Lebon a publié plusieurs Mémoires où il montre que le procédé qu'il emploie est applicable à de grands nombres. Pour donner une idée de cette nouvelle méthode, M. E. Lebon a publié la présente Table qui permet de résoudre, dans le cas d'un nombre non divisible par 2, 3, 5, 7 ou 11 et inférieur à 30030, la première Partie du problème précédent sans extraire de racine carrée et d'un coup d'œil, et la seconde Partie soit d'un coup d'œil, soit très rapidement. Nous sommes heureux de recommander à l'attention des mathématiciens l'original travail de M. E. Lebon, en exprimant le désir de voir bientôt apparaître une Table fondée sur la nouvelle méthode et résolvant le problème en question pour des nombres supérieurs à 9 millions, limite des Tables actuelles de facteurs premiers. C. B.

CERTIFICATS DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

Paris.

I. Épreuve théorique. — 1° *Déterminer toutes les surfaces réglées applicables sur l'hyperboloïde*

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} = 1 - \frac{z^2}{b^2};$$

2° *Indiquer parmi ces surfaces celles pour lesquelles le cône directeur est de révolution ;*

3° *Chercher, en particulier, celle qui a même cône directeur que l'hyperboloïde précédent, sans lui être identique ;*

4° *Former et intégrer l'équation des lignes de courbure de cette dernière surface.*

II. Épreuve pratique. — *Résoudre l'équation de Fredholm*

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^1 f(x,s)\varphi(s)\,ds = \psi(x),$$

où f et ψ sont des fonctions données et λ une constante connue, dans les cas où f (x, s) a l'une des formes suivantes :

1°
$$f(x, s) = \theta(x)\sigma(s),$$

2°
$$f(x, s) = \sum_{h=1}^{h=n} \theta_h(x)\sigma_h(s).$$

Voir ce que deviennent alors les développements en série, au moins dans le premier cas. (Octobre 1907.)

Nancy.

Épreuve théorique. — I. *Lignes asymptotiques des surfaces réglées dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire.*

II. *On considère la congruence des droites définies, dans un système de coordonnées rectangulaires* O*xyz*, *par les équations*

$$\frac{x - 2au - ae^{2u}}{\cos v} = \frac{y + 2av}{\sin v} = \frac{z - a\cos v\,(e^{3u} + 3e^{u})}{\operatorname{sh} u},$$

où u et v désignent deux paramètres arbitraires, a une constante donnée.

1° *Démontrer que les surfaces développables de la congruence sont définies par l'équation différentielle*

$$\sin v\, du^2 + 2\cos v\, du\, dv - \sin v\, dv^2,$$

et intégrer cette équation différentielle.

2° *On prend sur une droite quelconque de la congruence le point* M *milieu du segment déterminé par les deux points focaux de cette droite; démontrer que la surface* Σ *lieu du point* M *est normale à toutes les droites de la congruence.*

3° *Déterminer les rayons de courbure principaux de la surface* Σ.

Épreuve pratique. — *Déterminer les lignes asymptotiques*

de la surface définie par les équations

$$x = \frac{\cos v}{\cos u}, \qquad y = \frac{\sin v}{\cos u}, \qquad z = 5v + 4(\operatorname{tang} u - u)$$

et construire les projections de ces lignes sur le plan xOy.

(Octobre 1907.)

CERTIFICATS D'ASTRONOMIE.

Paris.

I. ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Réfractions astronomiques par les hauteurs supérieures à* 15°;

2° *Sextant. Description et usage.*

II. ÉPREUVE PRATIQUE. — *Résoudre l'équation de Képler*

$$x - e \sin x = M,$$

en supposant

$$M = 332^\circ 28' 55'',$$
$$e = 0,24532.$$

(Octobre 1907.)

Marseille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Calcul des longitudes terrestres au moyen des occultations.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer le volume d'un tétraèdre* OABC *connaissant les longueurs* a, b, c *des trois arêtes qui aboutissent à un même sommet* O, *ainsi que les angles* α, β, γ *que ces arêtes font deux à deux.*

Données numériques :

$$a = 17^m,246, \qquad \alpha = 75^\circ.27'.34'',7,$$
$$b = 12,723, \qquad \beta = 82.43.51,2,$$
$$c = 7,932, \qquad \gamma = 67.58.27,9.$$

SOLUTION.

$$V = \frac{1}{3}abc\sqrt{\sin p.\sin(p-\alpha)\sin(p-\beta)\sin(p-\gamma)}.$$

	° ′ ″		Log.
α..........	75.27.34,7		
β..........	82.43,51,2	$\sin p$........	$\bar{1}$,9637602
γ..........	67.58.27,9	$\sin(p-\alpha)$...	$\bar{1}$,7856578
$2p$.........	226. 9.53,8	$\sin(p-\beta)$...	$\bar{1}$,7035534
p..........	113. 4.56,9	$\sin(p-\gamma)$...	$\bar{1}$,8503025
$p-\alpha$......	37.37.22,2	Δ.......	$\bar{1}$,3032739
$p-\beta$......	30.21. 5,7		
$p-\gamma$......	45. 6.29,0	$\sqrt{\Delta}$...........	$\bar{1}$,6516369
		a...........	1,2366884
		b...........	1,1045895
		c...........	0,8993827
		colog. 3......	$\bar{1}$,5228787
		V.......	2,4151762

$V = 260^{m^3},125.$

$a = 17^m,246,$
$b = 12,723,$
$c = \ \ 7,932.$

(Octobre 1907.)

Montpellier.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Parallaxe lunaire. Principe de la méthode employée pour la détermination de cette parallaxe. (On suppose deux observateurs très éloignés sur le même méridien terrestre et observant le passage de l'astre au méridien.)*

Méthode mécanique : Établir la formule qui lie
a, *rayon de l'orbite lunaire supposée circulaire ;*
T, *durée du mois sidéral ;*
ρ, *rayon de la Terre sphérique ;*
l, *longueur du pendule battant la seconde à la surface de la Terre.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soient :*
a, *le rayon de l'orbite lunaire supposée circulaire ;*
T, *la durée du mois sidéral ;*
ρ, *le rayon de la Terre supposée sphérique ;*
l, *la longueur de la pendule battant la seconde à la surface de la Terre.*

Dans l'épreuve théorique on a dû démontrer la formule $4a^3 = lT^2\rho^2$. *Si l'on connaît* $l = 0^m,99$ *et* $T = 2360000$ *secondes, en se contentant pour définir* ρ *de la définition du mètre, on demande de calculer a et de vérifier que cette distance moyenne vaut approximativement* 60 *rayons terrestres.* (Novembre 1907.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2089.

(1908, p. 95.)

On considère dans le plan d'une courbe (M) *un pôle* O. *Si n et t sont les points de rencontre respectifs de la normale et de la tangente en un point* M *de cette courbe avec la perpendiculaire élevée en* O *au rayon vecteur* OM, *et si l'on connaît la direction de la normale en t, au lieu de ce point t* [*adjointe infinitésimale* (*t*) *de M. d'Ocagne*], *on a une construction du centre de courbure* μ, *répondant au point* M, *sous les deux formes suivantes :*

1° *La parallèle menée, à la normale en t, par le point de rencontre* α *du rayon vecteur* OM *avec la perpendiculaire élevée en n à la normale* M*n*, *coupe cette dernière au centre de courbure* μ.

2° *Si, au point de rencontre* N *de la normale* M*n avec la parallèle menée par* O *à la normale en* (*t*), *on élève une perpendiculaire* M*n jusqu'à sa rencontre en un point* V *de* OM, *la perpendiculaire élevée en ce point* V *à* OM *coupe* M*n au centre de courbure* μ.

Appliquer cette construction dans le cas particulier où la courbe (M) *est une conique de foyer* O.

(Farid-Boulad).

SOLUTION

Par M. Ph. du Plessis.

Appelons u et v les points où la normale en t à la courbe (t) coupe respectivement les droites MO et Mn. Si les points M

et t sont considérés sur la droite variable Mt, on a

$$\frac{d(\mathrm{M})}{d(t)} = \frac{\mathrm{M}\mu}{tv}.$$

Mais si $d\theta$ est l'angle infiniment petit dont tournent simultanément les droites OM et Ot, on a

$$d(\mathrm{M}) = \mathrm{M}n.\,d\theta, \qquad d(t) = tu.\,d\theta.$$

On en déduit

$$\frac{\mathrm{M}n}{\mathrm{M}\mu} = \frac{tu}{tv}.$$

Si la parallèle à tu menée par μ coupe MO en α et Mt en s, on a

$$\frac{tu}{tv} = \frac{s\alpha}{s\mu}.$$

Donc,

$$\frac{\mathrm{M}n}{\mathrm{M}\mu} = \frac{s\alpha}{s\mu}$$

et, par suite, αn est parallèle à Mt, ce qui établit la première proposition.

On a ensuite, en vertu de la construction indiquée,

$$\frac{\mathrm{M}n}{\mathrm{MN}} = \frac{\mathrm{M}\alpha}{\mathrm{MV}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{M}\mu} = \frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{M}\alpha},$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\frac{\mathrm{M}n}{\mathrm{M}\mu} = \frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{MV}}$$

et, par suite, Vμ est parallèle à On, c'est-à-dire perpendiculaire à OM.

Si la courbe (M) est une conique de foyer O, la ligne (t) est une perpendiculaire à l'axe focal. Donc, *si la perpendiculaire élevée au rayon vecteur par le foyer O coupe la normale en n, et si la perpendiculaire élevée à la normale en n coupe le rayon vecteur en α, le centre de courbure est sur la parallèle à l'axe focal menée par α.*

Autre solution par M. Bros.

[Q1a]

ESSAI DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A UNE INFINITÉ DE COORDONNÉES

(SUITE);

PAR M. M. FRÉCHET.

Nous avons montré dans notre premier article [1] comment on pouvait étendre les définitions de la Géométrie à un espace Ω ainsi défini : chaque point x de cet espace est déterminé par une infinité de coordonnées $x_1, x_2, \ldots$ qui sont des nombres réels quelconques tels que la série

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + \ldots$$

soit convergente.

Deux points coïncident si leurs coordonnées sont respectivement égales. La distance de deux points $(x_1, x_2, \ldots)$ et $(y_1, y_2, \ldots)$ est la racine carrée de la somme de la série convergente

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2 + \ldots.$$

En utilisant les définitions de M. Padoa, on trouve que la droite qui passe par les points distincts a, b est l'ensemble des points

$$x = ra + sb$$

(où r et s sont deux nombres réels tels que $r + s = 1$), c'est-à-dire dont les coordonnées sont

$$x_i = ra_i + sb_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

(1) *Voir* ce même Recueil, mars 1908, p. 97.

De même, le plan déterminé par les points non en ligne droite a, b, c est l'ensemble des points

$$x = ra + sb + tc,$$

où r, s, t sont trois nombres réels tels que l'on ait

$$r + s + t = 1.$$

Définition d'un hyperplan. — En généralisant la méthode de M. Padoa, on est amené naturellement à la définition suivante :

Soient a, b, c, d quatre points non dans un même plan. *Nous appellerons* hyperplan *abcd l'ensemble des points x tels qu'il n'existe aucun point y distinct de x vérifiant simultanément les conditions*

$$(7) \qquad \begin{cases} (y, a) = (x, a), & (y, b) = (x, b) \\ (y, c) = (x, c), & (y, d) = (x, d). \end{cases}$$

Nous allons montrer que l'hyperplan *abcd* existe et qu'il coïncide avec l'ensemble E des points x dont les coordonnées peuvent s'écrire sous la forme

$$x_i = ra_i + sb_i + tc_i + ud_i \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

où r, s, t, u sont quatre nombres réels tels que

$$r + s + t + u = 1.$$

D'abord l'hyperplan *abcd* existe, c'est-à-dire qu'il comprend au moins un point, par exemple le point a, et de même les points b, c, d.

Tout point x de E est dans l'hyperplan, car, pour un tel point, on voit facilement qu'on a

$$\begin{aligned} & r[(y, a)^2 - (x, a)^2] + s[(y, b)^2 - (x, b)^2] \\ & \quad + t[(y, c)^2 - (x, c)^2] + u[(y, d)^2 - (x, d)^2] = (x, y)^2, \end{aligned}$$

quel que soit le point y. Donc, si $y \neq x$, il est impossible que chacun des crochets soit nul.

Réciproquement, tout point de l'hyperplan est un point de E.

Il revient au même de prouver que, si x n'est pas dans E, on peut trouver un point $y \neq x$ tel que les conditions (7) soient remplies. Pour cela admettons qu'on ait pu trouver un point h de E dont les coordonnées $h_1, h_2, \ldots$ vérifient les conditions

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \sum(h_i - a_i)(h_i - x_i) &= \sum(h_i - b_i)(h_i - x_i) \\ &= \sum(h_i - c_i)(h_i - x_i) \\ &= \sum(h_i - d_i)(h_i - x_i) = 0 \\ &(i = 1, 2, \ldots) \end{aligned}\right.$$

et prenons pour y

$$y = 2h - x.$$

Le point y ne peut coïncider avec x, puisque alors h qui est dans E coïnciderait avec x qui n'y est pas. On voit facilement que l'on aura

$$\begin{aligned} (y, a)^2 - (x, a)^2 &= \sum(y_i + x_i - 2a_i)(y_i - x_i) \\ &= 4\sum(h_i - a_i)(h_i - x_i) = 0. \end{aligned}$$

On a bien pour le point y

$$(y, a) = (x, a)$$

et de même

$$(y, b) = (x, b), \qquad (y, c) = (x, c), \qquad (y, d) = y, d.$$

Démontrons maintenant l'existence du point h. Il

suffit de prendre

$$h_i = d_i + r(a_i - d_i) + s(b_i - d_i) + t(c_i - d_i) \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

et de déterminer r, s, t de façon qu'on ait

$$(9) \quad \begin{cases} \sum (h_i - x_i)(a_i - d_i) = \sum (h_i - x_i)(b_i - d_i) \\ \qquad = \sum (h_i - x_i)(c_i - d_i) = 0. \end{cases}$$

Car on aura

$$\begin{aligned} \sum (h_i - a_i)(h_i - x_i) = (r-1) & \sum (h_i - x_i)(a_i - d_i) \\ & + s \sum (h_i - x_i)(b_i - d_i) \\ & + t \sum (h_i - x_i)(c_i - d_i) = 0, \end{aligned}$$

et, en permutant a, b, c, d, on retrouve les conditions (8).

Or, pour satisfaire aux nouvelles conditions (9), il suffit de prendre pour r, s, t un système de solutions des équations obtenues en remplaçant dans (9) h par son expression, soient

$$\begin{aligned} & r\left[\sum (a_i - d_i)^2\right] + s\left[\sum (b_i - d_i)(a_i - d_i)\right] \\ & + t\left[\sum (c_i - d_i)(a_i - d_i)\right] + \left[\sum (d_i - x_i)(a_i - d_i)\right] = 0, \\ & r\left[\sum (a_i - d_i)(b_i - d_i)\right] + s\left[\sum (b_i - d_i)^2\right] \\ & + t\left[\sum (c_i - d_i)(b_i - d_i)\right] + \left[\sum (d_i - x_i)(b_i - d_i)\right] = 0, \\ & r\left[\sum (a_i - d_i)(c_i - d_i)\right] + s\left[\sum (b_i - d_i)(c_i - d_i)\right] \\ & + t\left[\sum (c_i - d_i)^2\right] + \left[\sum (d_i - x_i)(c_i - d_i)\right] = 0. \end{aligned}$$

Le théorème sera démontré si nous prouvons qu'on peut résoudre ces équations. Nous allons faire voir pour cela que, les points a, b, c, d n'étant pas dans le même plan, le déterminant Δ des coefficients de r, s, t est différent de zéro. Or, ce déterminant Δ est la limite pour n infini du déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \sum_1^n (a_i - d_i)^2 & \sum_1^n (b_i - d_i)(a_i - d_i) & \sum_1^n (c_i - d_i)(a_i - d_i) \\ \sum_1^n (a_i - d_i)(b_i - d_i) & \sum_1^n (b_i - d_i)^2 & \sum_1^n (c_i - d_i)(b_i - d_i) \\ \sum_1^n (a_i - d_i)(c_i - d_i) & \sum_1^n (b_i - d_i)(c_i - d_i) & \sum_1^n (c_i - d_i)^2 \end{vmatrix}.$$

D'après la règle de multiplication des matrices, on sait que Δ_n peut encore s'écrire

$$\Delta_n = \sum_1^n [D_{i,j,k}]^2$$

avec

$$D_{i,j,k} = \begin{vmatrix} a_i - d_i & a_j - d_j & a_k - d_k \\ b_i - d_i & b_j - d_j & b_k - d_k \\ c_i - d_i & c_j - d_j & c_k - d_k \end{vmatrix},$$

où l'on prend pour i, j, k successivement toutes les combinaisons possibles des nombres 1, 2, ..., n trois à trois.

On a donc

$$0 \leqq [D_{i,j,k}]^2 \leqq \Delta_n$$

et

$$0 \leqq \Delta_n \leqq \Delta.$$

Si Δ était nul, on aurait $D_{i,j,k} = 0$, quels que soient i, j, k; on pourrait alors trouver trois nombres u, v, w

non tous nuls tels que l'on ait, quel que soit i,

$$u(a_i - d_i) + v(b_i - d_i) + w(c_i - d_i) = 0$$

ou

$$d_i = \frac{ua_i + vb_i + wc_i}{u + v + w},$$

c'est-à-dire que les points a, b, c, d seraient dans un même plan contrairement à notre hypothèse. Ainsi, il est démontré qu'un hyperplan $abcd$ est l'ensemble des points x dont les coordonnées sont de la forme

$$x_i = d_i + \lambda(a_i - d_i) + \mu(b_i - d_i) + \nu(c_i - d_i)$$
$$(i = 1, 2, \ldots).$$

Chaque point de cet hyperplan est déterminé par les trois nombres réels indépendants λ, μ, ν et varie de manière continue avec ceux-ci. De sorte que *cet hyperplan est un espace à trois dimensions*. Nous allons montrer que *cet espace jouit de propriétés entièrement analogues à celles de l'espace ordinaire, c'est-à-dire de l'espace euclidien*. Autrement dit, nous allons prouver qu'on peut faire correspondre point par point un hyperplan quelconque et l'espace euclidien, de façon que les figures correspondantes aient le même nom et que les longueurs correspondantes soient égales.

Pour cela, montrons d'abord que l'on peut toujours trouver dans un hyperplan trois droites concourantes rectangulaires deux à deux. En effet, soit l'hyperplan $abcd$. Prenons ab pour l'une des droites cherchées ; on pourra, d'une infinité de manières, déterminer un point de l'hyperplan

$$b' = d + \lambda'(a - d) + \mu'(b - d) + \nu'(c - d),$$

tel que db' soit perpendiculaire à da. Il suffit que l'on

ait

$$\begin{aligned} o &= \sum (a_i - d_i)(b'_i - d_i) \\ &= \lambda' \sum (a_i - d_i)^2 \\ &\quad + \mu' \sum (b_i - d_i)(a_i - d_i) + \nu' \sum (c_i - d_i)(a_i - d_i). \end{aligned}$$

Ceci fait, on pourra encore choisir un point c' de l'hyperplan tel que dc' soit perpendiculaire à da et db'. Il suffit de prendre

$$c' = d + \lambda''(a - d) + \mu''(b' - d) + \nu''(c = d),$$

avec

$$o = \sum (a_i - d_i)(c'_i - d_i) = \lambda'' \sum (a_i - d_i)^2 + \nu'' \sum (a_i - d_i)(c_i - d_i),$$

$$o = \sum (b'_i - d_i)(c'_i - d_i) = \mu'' \sum (b'_i - d_i)^2 + \nu'' \sum (b'_i - d_i)(c_i - d_i),$$

et l'on pourra toujours tirer λ'' et μ'' de ces deux relations.

En définitive, on voit qu'en remplaçant au besoin b et c par b' et c', on pourra toujours supposer l'hyperplan défini par quatre points a, b, c, d tels que les droites da, db, dc soient rectangulaires deux à deux.

Écrivons alors les coordonnées d'un point x quelconque de l'hyperplan $abcd$ sous la forme

$$x_i = d_i + X\alpha_i + Y\beta_i + Z\gamma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

en posant

$$\alpha_i = \frac{a_i - d_i}{(a, d)}, \qquad \beta_i = \frac{b_i - d_i}{(b, d)}, \qquad \gamma_i = \frac{c_i - d_i}{(c, d)}.$$

Si x' est un autre point de l'hyperplan, de coordonnées

$$x'_i = d_i + X' d_i + Y'\beta_i + Z'\gamma_i,$$

on aura, puisque *ad, bd, cd* sont rectangulaires,

$$(x, x') = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}.$$

On voit maintenant que, si l'on se donne dans l'espace euclidien trois axes de coordonnées rectangulaires, on pourra faire correspondre à tout point x de l'hyperplan *abcd* un point P de cet espace ayant X, Y, Z pour coordonnées rectangulaires, et réciproquement. De plus, cette correspondance uniforme et réciproque est une *application* de ces deux espaces en ce sens que les distances de deux points correspondants sont conservées.

Alors nous voyons qu'à un point de l'hyperplan correspond un point de l'espace euclidien et cela de telle manière que, si deux couples de points de l'hyperplan sont superposables (c'est-à-dire si leurs distances sont égales), les deux couples correspondants de l'espace euclidien sont superposables. Comme, d'une part, les seuls symboles non définis de M. Padoa sont *point* et *couples superposables,* et que, d'autre part, ses définitions appliquées au cas de l'espace euclidien conduisent à la géométrie ordinaire, nous pouvons en conclure que les figures correspondantes de l'hyperplan et de l'espace euclidien porteront le même nom.

En d'autres termes, *la géométrie de l'hyperplan est identique à la géométrie euclidienne.*

Il y aura toutefois lieu de n'appeler *sphère* dans un hyperplan que la partie d'une sphère de l'espace Ω qui est située dans cet hyperplan, de même qu'on appelle *cercle* la partie d'une sphère située dans un plan.

En généralisant la méthode précédente, on verrait que la géométrie de l'espace à n dimensions telle qu'elle est habituellement développée est identique à

la géométrie dans l'ensemble des points x de l'espace Ω, tels que leurs coordonnées soient de la forme

$$x_i = \alpha^{(1)} a_i^{(1)} + \alpha^{(2)} a_i^{(2)} + \ldots + \alpha^{(n+1)} a_i^{(n+1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

où $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n+1)}$ sont des nombres réels assujettis seulement à la condition

$$\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \ldots + \alpha^{(n+1)} = 1,$$

et où $a^{(1)}, \ldots, a^{(n+1)}$ sont $n+1$ points dont les coordonnées ne vérifient pas une relation linéaire et homogène à coefficients constants non tous nuls, telle que

$$\beta^{(1)} a_i^{(1)} + \beta^{(2)} a_i^{(2)} + \ldots + \beta^{(n+1)} a_i^{(n+1)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Application de l'espace Ω sur lui-même. — Nous allons chercher maintenant à déterminer l'*application* la plus générale de l'espace Ω sur lui-même. Nous appellerons ainsi une transformation ponctuelle uniforme de l'espace Ω telle que la distance de deux points quelconques soit conservée dans la transformation. Une telle correspondance sera, en particulier, une transformation continue, puisque, si la distance d'un point M_p à un point fixe M tend vers zéro, la distance du point M'_p correspondant à M_p, au point M' correspondant à M, tendra aussi vers zéro.

Nous allons démontrer que *l'application la plus générale de Ω sur lui-même se représente analytiquement par la transformation orthogonale la plus générale, suivie de la translation la plus générale.*

Appelons Tx le point correspondant à x dans une application de Ω sur lui-même, en sorte que ses coordonnées seront

$$T_1 x, \quad T_2 x, \quad \ldots, \quad T_n x, \quad \ldots.$$

Il faudra que, quels que soient les points x et y de Ω,

on ait

$$(\mathrm{T}x, \mathrm{T}y) = (x, y).$$

En particulier, quels que soient λ λ', on aura

$$\left(\mathrm{T}\frac{x+\lambda y}{1+\lambda}, \mathrm{T}\frac{x+\lambda' y}{1+\lambda'}\right) = \left(\frac{x+\lambda y}{1+\lambda}, \frac{x+\lambda' y}{1+\lambda'}\right).$$

Cette dernière quantité, d'après la définition de la distance, est identiquement égale à

$$\left|\frac{\lambda'-\lambda}{(1+\lambda)(1+\lambda')}\right|(x, y).$$

On aura donc

$$\left(\mathrm{T}\frac{x+\lambda y}{1+\lambda}, \mathrm{T}\frac{x+\lambda' y}{1+\lambda'}\right) = \left(\frac{\mathrm{T}x+\lambda \mathrm{T}y}{1+\lambda}, \frac{\mathrm{T}x+\lambda' \mathrm{T}y}{1+\lambda'}\right).$$

En particulier, en posant $z \equiv x + \lambda y$,

$$(\mathrm{T}z, \mathrm{T}x) = \left(\frac{\mathrm{T}x+\lambda \mathrm{T}y}{1+\lambda}, \mathrm{T}x\right) = \left|\frac{\lambda}{1+\lambda}\right|(\mathrm{T}x, \mathrm{T}y),$$

$$(\mathrm{T}z, \mathrm{T}y) = \left(\frac{\mathrm{T}x+\lambda \mathrm{T}y}{1+\lambda}, \mathrm{T}y\right) = \left|\frac{1}{1+\lambda}\right|(\mathrm{T}x, \mathrm{T}y).$$

En ajoutant ou retranchant, on a

$$\pm(\mathrm{T}z, \mathrm{T}x) \pm (\mathrm{T}z, \mathrm{T}y) = (\mathrm{T}x, \mathrm{T}y).$$

Or, nous avons vu ([1]) que cette égalité n'a lieu que si z est sur la droite qui joint les points $\mathrm{T}x$, $\mathrm{T}y$. Alors

$$\mathrm{T}z \equiv \frac{\mathrm{T}x+\mu \mathrm{T}y}{1+\mu},$$

et l'on a

$$(\mathrm{T}z, \mathrm{T}x) = \left|\frac{\mu}{1+\mu}\right|(\mathrm{T}x, \mathrm{T}y),$$

$$(\mathrm{T}z, \mathrm{T}y) = \left|\frac{1}{1+\mu}\right|(\mathrm{T}x, \mathrm{T}y).$$

([1]) Article précédent, p. 104.

D'où, en comparant avec les expressions précédemment obtenues,

$$\left|\frac{\lambda}{1+\lambda}\right| = \left|\frac{\mu}{1+\mu}\right|, \qquad \left|\frac{1}{1+\lambda}\right| = \left|\frac{1}{1+\mu}\right|,$$

ce qui donne $\lambda = \mu$ et, par suite,

$$T\frac{x+\lambda y}{1+\lambda} = \frac{Tx+\lambda Ty}{1+\lambda},$$

quels que soient le nombre λ et les points x, y.

Ainsi, *toute droite se transforme en une droite*.

Pour simplifier, nous allons maintenant réduire Tx à une forme plus simple. Posons

$$T_0 = \alpha \qquad \text{et} \qquad Ux = Tx - \alpha.$$

On aura

$$U_0 \equiv 0, \qquad (Ux, Uy) = (x, y);$$

on est ramené au cas d'une application qui laisse l'origine fixe. On aura encore

$$(10) \qquad U\frac{x+\lambda y}{1+\lambda} = \frac{Ux+\lambda Uy}{1+\lambda}.$$

En particulier, pour $y \equiv 0$ et $\lambda = \frac{1}{\rho} - 1$,

$$(11) \qquad U\rho x \equiv \rho Ux,$$

ceci ayant lieu quel que soit ρ. L'égalité (10) devient donc

$$U(x+\lambda y) \equiv Ux + \lambda Uy,$$

et pour $\lambda = 1$

$$(12) \qquad U(x+y) \equiv Ux + Uy.$$

D'une manière générale, on tire de (11) et (12) l'identité

$$(13) \quad U(\lambda x + \mu y + \nu z + \rho t + \ldots) \equiv \lambda Ux + \mu Uy + \nu Uz + \ldots.$$

quels que soient les quantités λ, μ, ν, ρ, ... et les points x, y, z, t, ... en nombre fini.

De cette identité fondamentale on peut maintenant conclure que les coordonnées de Tx sont des fonctions linéaires de celles de x. En effet, on en tire d'abord

$$(14)\quad \begin{cases} Ux^{(k)} \equiv x_1 U_{1,0,0} + \ldots + x_2 U_{0,1,0,0} + \ldots + x_k U_{0,0,\ldots,1,0,0,\ldots} \\ \qquad \equiv a^{(1)} x_1 + a^{(2)} x_2 + \ldots + a^{(k)} x_k, \end{cases}$$

$a^{(1)}$, ..., $a^{(k)}$ étant des points bien déterminés par la transformation U et $x^{(k)}$ le point de coordonnées x_1, x_2, ..., $x_{k,0,0,\ldots}$.

D'autre part, si x est le point de coordonnées x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}, ..., on a

$$(Ux, Ux^{(k)}) = (x, x^{(k)}) = \sqrt{x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 + \ldots}.$$

Alors

$$|U_h x - U_h x^{(k)}| \leqq \sqrt{[U_1 x - U_1 x^{(k)}]^2 + [U_2 x - U_2 x^{(k)}]^2 + \ldots}$$
$$= [Ux, Ux^{(k)}] = \sqrt{x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 + \ldots}.$$

Lorsque h est fixe et k croît indéfiniment, on voit qu'on aura

$$(15)\qquad U_h x = \lim U_h x^{(k)}.$$

En combinant les égalités (14) et (15), on en conclut :

1° Que la série

$$U_h x = a_h^{(1)} x_1 + \ldots + a_h^{(k)} x_k + \ldots$$

est convergente quel que soit h;

2° Que l'on a

$$Tx = \alpha + a^{(1)} x_1 + a^{(2)} x_2 + \ldots + a^{(k)} x_k + \ldots$$

avec

$$\alpha = T0,\quad a^{(1)} = Ti^{(1)} - T0,\quad \ldots,\quad a^{(k)} = Ti^{(k)} - T0,\quad \ldots,$$

$i^{(k)}$ désignant le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la $k^{\text{ième}}$ qui est égale à 1.

Ainsi $\mathrm{T}x$ est une transformation linéaire déterminée; mais cela ne suffit pas encore, les coefficients ne sont pas quelconques.

On a, en effet,

$$(a^{(k)}, o) = (\mathrm{U}i^{(k)}, \mathrm{U}o) = (i^{(k)}, o) = 1,$$
$$(a^{(k)}, a^{(k')}) = (\mathrm{U}i^{(k)}, \mathrm{U}i^{(k')}) = (i^{(k)}, i^{(k')}) = 2 \qquad \text{si } k \neq k'.$$

Or, on a

$$(a^k, o)^2 = [a_1^{(k)}]^2 + [a_2^{(k)}]^2 + \ldots,$$
$$\begin{aligned}(a^{(k)}, a^{(k')})^2 &= [a_1^{(k)} - a_1^{(k')}]^2 + \ldots \\ &= [a_1^{(k)}]^2 + [a_2^{(k)}]^2 + \ldots + [a_1^{(k')}]^2 + [a_2^{(k')}]^2 + \ldots \\ &\quad - 2[a_1^{(k)} a_1^{(k')} + a_2^{(k)} a_2^{(k')} + \ldots].\end{aligned}$$

On a donc en définitive

$$(16) \qquad a_1^{(k)} a_1^{(k')} + a_2^{(k)} a_2^{(k')} + \ldots = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq k', \\ 1 & \text{si} \quad k = k'. \end{cases}$$

Je dis maintenant que le système des nombres a_h^k est *complet*, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun point z de coordonnées $z_1, z_2, \ldots$ tel que l'on ait

$$z_1^2 + z_2^2 + \ldots = 1, \qquad a_h^{(1)} z_1 + a_h^{(2)} z_2 + \ldots + a_h^{(k)} z_k + \ldots = 0$$

quel que soit h, z étant fixe. En effet, on aurait alors

$$\mathrm{U}z \equiv o.$$

Donc

$$1 = (z, o) = (\mathrm{U}z, \mathrm{U}o) = (o, o) = 0.$$

Ainsi la transformation $\mathrm{T}x$ peut se décomposer en deux :

1° Une transformation orthogonale complète,

$$\mathrm{U}x = a^{(1)}x_1 + a^{(2)}x_2 + a^{(3)}x_3 + \ldots,$$

c'est-à dire une transformation linéaire dont les coef-

ficients forment un système complet satisfaisant aux conditions (16);

2° Une transformation de la forme

$$tX = X + \alpha$$

(où α est un point fixe) et que nous appellerons une *translation*. Réciproquement, le produit de deux telles transformations est une application de l'espace Ω sur lui-même. Il suffit de démontrer que les distances sont conservées. Or, ceci est évident pour la translation. En ce qui concerne la transformation orthogonale, M. Riesz a démontré ([1]) que, quels que soient les nombres $a_h^{(k)}$, pourvu qu'ils forment un système complet satisfaisant aux conditions (16), les équations linéaires

$$(17) \qquad X_h = a_h^{(1)} x_1 + a_h^{(2)} x_2 + \ldots$$

admettent toujours, lorsque $\sum X_h^2$ converge, un système unique de solutions tel que $\sum x_k^2$ converge et donné par les formules

$$(18) \qquad x_k = a_1^{(k)} X_1 + a_2^{(k)} X_2 + \ldots,$$

et l'on a de plus

$$(19) \qquad \sum x_k^2 = \sum X_h^2.$$

De la dernière remarque on déduit que

$$(Ux', Ux'') = (x', x''),$$

quels que soient les points x', x''. En effet, on a

$$Ux' - Ux'' = U(x' - x'')$$

([1]) *Sur les systèmes orthogonaux* (*Comptes rendus* du 18 mars 1907).

et alors il suffit d'appliquer l'égalité (19) à

$$x = x' - x''.$$

De plus, l'énoncé précédent montre que la transformation inverse est aussi uniforme. Enfin, lorsque X_1, X_2, ... sont tous nuls sauf $X_{h'} = 1$, les égalités (18) donnent

$$x_1 = a_{h'}^{(1)}, \qquad x_2 = a_{h'}^{(2)}, \qquad \dots$$

et les égalités (17) donnent alors

$$a_h^{(1)} a_{h'}^{(1)} + a_h^{(2)} a_{h'}^{(2)} + \dots = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad h = h', \\ 0 & \text{si} \quad h \neq h'. \end{cases}$$

Ensembles de points. — Nous avons observé que la quantité (a, b), définie pour deux points quelconques a, b, satisfait aux deux conditions suivantes :

1° $(a, b) = 0$, si a, b coïncident et seulement dans ce cas;

2° On a, quels que soient a, b, c,

$$(a, b) \leqq (a, c) + (c, b).$$

Elle jouit donc des propriétés qui nous ont servi à caractériser dans notre Thèse l'*écart* de deux éléments [1]. L'espace Ω forme donc une classe (E) [2].

On dira qu'une suite $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, ... de points de Ω a une limite a, s'il existe un point a de Ω tel que $(a, a^{(n)})$ tende vers zéro quand n croît indéfiniment. Il est nécessaire pour cela que la coordonnée de $a^{(n)}$ d'un ordre déterminé tende vers la coordonnée de même rang de a, mais ce n'est pas suffisant.

---

(1) *Voir* ma Thèse : *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, p. 30. Paris, Hermann.

(2) *Loc. cit.*, p. 30.

Je dis maintenant que l'espace Ω forme une classe *normale* (¹).

Il suffit pour cela de démontrer les deux propriétés suivantes :

1° On peut généraliser dans Ω le théorème de Cauchy sur la convergence d'une suite. Autrement dit, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de points de Ω, $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, ..., $a^{(n)}$, ..., ait une limite est que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on puisse trouver un entier n tel que l'on ait, quel que soit l'entier p,

$$(a^{(n)}, a^{(n+p)}) < \varepsilon.$$

La condition est nécessaire; car, s'il y a une limite a, on aura, pour $q > n - 1$,

$$(a^{(q)}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

et, par suite,

$$(a^{(n)}, a^{(n+p)}) \leqq (a^{(n)}, a) + (a^{(n+p)}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Réciproquement, si la condition est vérifiée, on a la même condition pour les coordonnées de rang déterminé i, puisque

$$| a_i^{(n)} - a_i^{(n+p)} | \leqq (a^{(n)}, a^{(n+p)}).$$

Donc, pour chaque valeur de i la suite $a_i^{(1)}$, $a_i^{(2)}$, ..., $a_i^{(n)}$, ... est convergente. Soit a_i sa limite; il faut d'abord montrer que $\sum a_i^2$ converge. Or posons

$$\omega_i^{(n)} = a_i - a_i^{(n)}.$$

On a, quels que soient i et p,

$$[a_1^{(n)} - a_1^{(n+p)}]^2 + \ldots + [a_i^{(n)} - a_i^{(n+p)}]^2 \leqq (a^{(n)}, a^{(n+p)})^2 < \varepsilon^2.$$

(¹) *Loc. cit.*, p. 23. La proposition actuelle a été énoncée sans démonstration par M. Riesz, *loc. cit.*, sous la forme qu'on obtient en prenant comme éléments, non des points, mais des fonctions.

Laissons i, n fixes et faisons croître p indéfiniment; on aura

$$(20) \qquad [a_1^{(n)} - a_1]^2 + \ldots + [a_i^{(n)} - a_i]^2 < \varepsilon^2;$$

donc

$$[\omega_1^{(n)}]^2 + \ldots + [\omega_i^{(n)}]^2 < \varepsilon^2$$

pour i quelconque.

Ainsi, la série

$$[\omega_1^{(n)}]^2 + \ldots + [\omega_i^{(n)}]^2 + \ldots$$

est convergente; il en est donc de même de la série

$$[\omega_1^{(n)} + a_1^{(n)}]^2 + \ldots + [\omega_i^{(n)} + a_i^{(n)}]^2 + \ldots,$$

c'est-à-dire de la série

$$(a_1)^2 + \ldots + (a_n)^2 + \ldots.$$

La suite a_1, a_2, ... définit bien un point de Ω. De plus, l'inégalité (20) ayant lieu quel que soit i, on a

$$(a^{(n)}, a) = \sqrt{[a_1^{(n)} - a_1]^2 + \ldots + [a_i^{(n)} - a_i]^2 + \ldots} < \varepsilon;$$

la suite $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, ... a bien pour limite le point a.

2° La classe des points de Ω est *séparable*. Autrement dit, on peut trouver une suite infinie dénombrable S de points de Ω, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, ..., $A^{(n)}$, ..., telle que tout point de Ω puisse être considéré comme la limite d'une suite $A^{(p_1)}$, $A^{(p_2)}$, ..., $A^{(p_n)}$, ... convenablement extraite de la suite S.

En effet, si l'on se donne une suite de q nombres *rationnels* d'un signe quelconque suivis d'une infinité de zéros,

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_q, \quad 0, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0, \quad \ldots,$$

la somme de ses carrés est convergente; elle définit donc un certain point α de Ω. Je dis que l'on peut prendre

pour suite $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ l'ensemble Σ de tous les points α obtenus en donnant à q toutes les valeurs possibles. Il est d'abord évident que tout point de Ω peut être considéré comme limite d'une suite extraite de Σ. En effet, quel que soit q et quel que soit le point a de Ω, je pourrai toujours choisir un point $\alpha^{(q)}$ de Σ, dont les coordonnées $\alpha_1^{(q)}, \ldots, \alpha_q^{(q)}, 0, \ldots$ vérifient les conditions

$$|a_1 - \alpha_1^{(q)}| < \frac{1}{q}, \qquad |a_2 - \alpha_2^{(q)}| < \frac{1}{2q}, \qquad \ldots,$$

$$|a_i - \alpha_i^{(q)}| < \frac{1}{iq}, \qquad \ldots, \qquad |a_q - \alpha_q^{(q)}| < \frac{1}{q^2},$$

d'où

$$(a, \alpha^{(q)})^2 < \frac{1}{q^2}\left[1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{i^2} + \ldots + \frac{1}{q^2}\right] + (a_{q+1})^2 + (a_{q+2})^2 + \ldots,$$

quantité infiniment petite lorsque q croît indéfiniment. Donc a est bien la limite d'une suite de points extraite de Σ :

$$\alpha^{(1)}, \quad \alpha^{(2)}, \quad \ldots, \quad \alpha^{(q)}, \quad \ldots.$$

Il faut encore montrer que l'on peut ranger *tous* les points de Σ en une suite infinie. En effet, appelons Σ_q l'ensemble des points de Σ dont toutes les coordonnées sont nulles à partir du rang $q+1$ inclusivement. Il est facile de voir qu'on peut ranger tous les nombres rationnels en une suite dénombrable (¹)

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_n, \quad \ldots.$$

Alors les coordonnées d'un point quelconque de Σ_q peuvent s'écrire sous la forme

$$c_{i_1}, \quad c_{i_2}, \quad \ldots, \quad c_{i_q}, \quad 0, \quad 0, \quad \ldots.$$

(¹) *Voir*, par exemple : BOREL, *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, p. 2.

Un point quelconque M de Σ_q est donc déterminé par q indices entiers; on peut le désigner sans ambiguïté par la notation $M_{i_1,\ldots,i_q}$; or on sait [1] que, dans ces conditions, l'ensemble Σ_q est dénombrable. Par suite, l'ensemble Σ qui est un ensemble dénombrable d'ensembles dénombrables de points est aussi un ensemble dénombrable de points. De sorte qu'on pourra ranger ses éléments en une suite infinie de points $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}, \ldots$.

Ensembles compacts. — Cherchons maintenant à quelles conditions un ensemble de points de Ω sera *compact, c'est-à-dire* tel qu'on puisse extraire de toute infinité de points de cet ensemble au moins une suite convergente. Si les points de Ω n'avaient qu'un nombre fini de dimensions, il suffirait que l'ensemble se trouve dans un domaine limité, c'est-à-dire que les coordonnées de ses points restent comprises entre des limites finies. Ici, la condition n'est plus suffisante. Or, si l'on veut généraliser la théorie des ensembles, la notion d'ensemble borné n'a plus aucune importance dès qu'elle ne coïncide plus avec celle d'ensemble compact. Il est donc essentiel de trouver la condition suffisante.

J'avais énoncé sans démonstration cette condition dans les *Comptes rendus*.

Pour qu'un ensemble E de points de Ω soit compact, il faut et il suffit :

1° Que les coordonnées $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ d'un point de cet ensemble restent comprises entre deux nombres fixes, indépendants du point;

2° Que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on puisse trouver un

---

(1) *Loc. cit.*, p. 2.

entier n tel que l'on ait

$$(a_{n+1})^2 + (a_{n+2})^2 + \ldots + (a_{n+p})^2 + \ldots < \varepsilon$$

pour tout point de l'ensemble, n gardant la même valeur.

On peut réunir ces deux conditions dans la suivante : *il faut et il suffit qu'il existe une suite de nombres fixes convergeant vers zéro,* $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots,$ *tels que l'on ait pour* tout *point de l'ensemble et quel que soit* n

$$(a_{n+1})^2 + (a_{n+2})^2 + \ldots + (a_{n+p})^2 + \ldots \leqq (M_n)^2.$$

Démontrons d'abord que la condition est suffisante. Considérons une infinité I de points de l'ensemble E. Je dis que I possède au moins un élément limite. En effet, les coordonnées de rang 1 des points de I sont toutes comprises entre $-M_1$ et $+M_1$; on peut donc extraire de I une suite I_1 de points

$$a^{(1)}, \quad a^{(2)}, \quad a^{(3)}, \quad \ldots$$

dont la suite des coordonnées de rang 1 est convergente. En procédant de même dans I_1, on formera une suite I_2 de points de I_1,

$$b^{(1)}, \quad b^{(2)}, \quad b^{(3)}, \quad \ldots,$$

dont les coordonnées de rang 2 ont une limite. On formera de même une suite I_3 prise dans I_2,

$$c^{(1)}, \quad c^{(2)}, \quad c^{(3)}, \quad \ldots,$$

dont les coordonnées de rang 3 ont une limite, etc. Alors la suite S de points

$$a^{(1)}, \quad b^{(2)}, \quad c^{(3)}, \quad \ldots$$

sera extraite de I et ses coordonnées d'un rang déterminé p auront une limite α_p quel que soit p. Je dis que les nombres α_p peuvent être considérés comme les

coordonnées d'un point α de Ω et que la suite S a pour limite α. En effet, désignons par $\lambda_1^{(n)}$, $\lambda_2^{(n)}$, ... les coordonnées du $n^{\text{ième}}$ point, $\lambda^{(n)}$, de la suite S. On a, quels que soient m, n et p,

$$[\lambda_{m+1}^{(n)}]^2 + [\lambda_{m+2}^{(n)}]^2 + \ldots + [\lambda_{m+p}^{(n)}]^2 \leqq (M_m)^2.$$

Si l'on fait croître n (m et p restant fixes), on aura

$$(\alpha_{m+1})^2 + (\alpha_{m+2})^2 + \ldots + (\alpha_{m+p})^2 \leqq (M_m)^2,$$

quels que soient m et p; donc, quand p croît, le premier membre croît (ou ne décroît pas) en restant borné. Par suite, la série

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_m^2 + \ldots$$

est convergente et l'on a même, quel que soit m,

$$(\alpha_{m+1})^2 + \ldots + (\alpha_{m+p})^2 + \ldots \leqq (M_m)^2.$$

Ainsi α_1, α_2, ... sont les coordonnées d'un point α de Ω. De plus, on a toujours, quel que soit n,

$$\begin{aligned}&[\alpha_{m+1} - \lambda_{m+1}^{(n)}]^2 + [\alpha_{m+2} - \lambda_{m+2}^{(n)}]^2 + \ldots \\ &\quad \leqq 2([\alpha_{m+1}]^2 + [\lambda_{m+1}^{(n)}]^2 + (\alpha_{m+2})^2 + [\lambda_{m+2}^{(n)}]^2 + \ldots) \leqq 4M_m^2.\end{aligned}$$

Soit alors ε un nombre donné; on pourra prendre m assez grand pour que $4M_m^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}$; m étant ainsi *fixé*, on pourra choisir un nombre q tel que l'inégalité $n > q$ entraîne

$$|\alpha_1 - \lambda_1^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{2m}, \qquad \ldots, \qquad |\alpha_m - \lambda_m^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

On aura donc, pour $n > q$,

$$\begin{aligned}(\alpha, \lambda^{(n)})^2 &= [\alpha_1 - \lambda_1^{(n)}]^2 + \ldots + [\alpha_m - \lambda_m^{(n)}]^2 \\ &\quad + ([\alpha_{m+1} - \lambda_{m+1}^{(n)}]^2 + \ldots) \leqq m\frac{\varepsilon^2}{4m^2} + \frac{\varepsilon^2}{4} < \varepsilon^2.\end{aligned}$$

Ainsi la suite $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, ... extraite de I tend vers un certain point α de Ω.

Prouvons maintenant que la condition est nécessaire.

Je dis d'abord que les coordonnées d'un rang déterminé quelconque des points d'un ensemble compact E ont une limite supérieure pour chaque valeur de ce rang. En effet, dans le cas contraire, il y aurait un rang p tel qu'on puisse extraire de E une suite S de points $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, ... dont les coordonnées de rang p croissent indéfiniment. Alors, il serait manifestement impossible d'extraire de S une suite de points ayant une limite.

Montrons ensuite que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n tel qu'on ait pour tout point $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ de E

$$(a_{n+1})^2 + (a_{n+2})^2 + \ldots \leqq \varepsilon.$$

En effet, dans le cas contraire, on pourrait trouver une valeur de ε et une suite de points $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, ... de E tels qu'on ait

$$(21) \qquad (a_n^{(n)})^2 + (a_{n+1}^{(n)})^2 + (a_{n+2}^{(n)})^2 + \ldots > \varepsilon,$$

quel que soit n, et, comme l'ensemble est supposé compact, on peut admettre que cette suite est convergente en la remplaçant au besoin par une suite convenablement extraite d'elle-même. Soient alors $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ les coordonnées du point limite; on pourra prendre q assez grand pour qu'on ait

$$(a^{(n)}, \alpha) < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \qquad \text{et} \qquad (\alpha_n)^2 + (\alpha_{n+1})^2 + \ldots < \frac{\varepsilon}{4}$$

pour $n > q$.

Alors

$$\begin{aligned}
&[a_n^{(n)}]^2 + [a_{n+1}^{(n)}]^2 + \ldots + \ldots \\
&\quad \leqq 2\{(\alpha_n)^2 + (\alpha_{n+1})^2 + \ldots + [a_n^{(n)} - \alpha_n]^2 + [a_{n+1}^{(n)} - \alpha_{n+1}]^2 + \ldots\} \\
&\quad \leqq 2\frac{\varepsilon}{4} + 2(a^{(n)}, \alpha)^2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

contrairement à l'inégalité (21).

Au moyen des théorèmes précédents, on peut appliquer à l'espace Ω les résultats généraux de ma Thèse et démontrer par exemple que *tout ensemble fermé de points de* Ω *est la somme d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble parfait ou nul sans éléments communs* (1). De même aussi, *pour que de toute famille* F (*dénombrable ou non*) *d'ensembles* I *tels que tout point d'un ensemble déterminé* E *de points de* Ω *soit intérieur au sens étroit à au moins l'un d'eux, on puisse extraire un nombre fini d'ensembles* I *formant une famille* G *jouissant de la même propriété que* H, *il faut et il suffit que* E *soit un ensemble compact* (2) *et fermé* (3).

Appelons aussi *fonction de points de* Ω une fonction dont la valeur est déterminée en chaque point de Ω. Nous pourrons dire que la fonction $F(x)$ est continue pour $x = a$ si $F(x)$ tend vers $F(a)$ quand x tend vers a.

Alors *toute fonction continue dans un ensemble compact et fermé de points de* Ω *y atteint son maximum* (4).

Et aussi : *Pour que des fonctions continues dans un même ensemble* E *compact et fermé de points de* Ω *soient telles que de toute suite de ces fonctions on puisse extraire une suite uniformément convergente, il faut et il suffit que ces fonctions soient en tout point de* E *bornées et également continues* (5).

En particulier, appelons *fonction* au plus *du pre-*

---

(1) *Voir* ma Thèse, p. 27.

(2) *Voir* plus haut la définition d'un ensemble compact.

(3) *Loc. cit.*, p. 26.

(4) *Loc cit.*, p. 9.

(5) *Loc. cit.*, p. 30.

mier degré [1] une fonction *continue dans* Ω telle que la quantité

$$\Phi(x) + \Phi(y) - \Phi(x+y)$$

soit indépendante de x et de y.

Nous allons chercher son expression générale. Pour cela, posons

$$F(x) \equiv \Phi(x) - \Phi(0);$$

$F(x)$ sera une fonction continue telle que

$$F(x) + F(y) - F(x+y) = 0.$$

On voit facilement que

$$F(cx) = cF(x)$$

si c est un nombre rationnel, d'après la méthode bien connue de Cauchy. Or, si c tend vers un nombre irrationnel c', $F(cx)$ tendra vers $F(c'x)$, puisque la fonction est continue; donc l'égalité a lieu quel que soit le nombre réel c. On en déduit facilement que, quels que soient les nombres réels $c_1, c_2, \ldots, c_n$ et les points $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$, on a

$$F(c_1 x^{(1)} + \ldots + c_n x^{(n)}) = c_1 F(x^{(1)}) + \ldots + c_n F(x^{(n)}).$$

Alors, si l'on appelle $i^{(k)}$ le point dont la coordonnée d'ordre k est égale à 1, les autres coordonnées étant égales à 0, et $x^{(k)}$ le point dont les k premières coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sont celles du point x, les autres étant égales à 0, on aura

$$\begin{aligned} F(x^{(k)}) &= F(x_1 i^{(1)} + x_2 i^{(2)} + \ldots + x_k i^{(k)}) \\ &= x_1 F(i^{(1)}) + x_2 F(i^{(2)}) + \ldots + x_k F(i^{(k)}). \end{aligned}$$

---

(1) *Cf.* Maurice Fréchet, *Sur les opérations linéaires* (*Transactions of the American mathematical Society*, 1904, p. 493; 1905, p. 134; 1907, p. 433).

En posant

$$F(i^{(k)}) = u_k, \qquad \Phi(o) = u_0,$$

on a

$$\Phi(x^{(k)}) = u_0 + u_1 x_1 + \ldots + u_k x_k.$$

Or, x est le point limite de $x^{(k)}$; donc $u_1 x_1 + \ldots + u_k x_k$ tend vers $F(x)$.

Ainsi, la série

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_k x_k + \ldots$$

est convergente quels que soient les nombres $x_1, x_2, \ldots,$ pourvu que Σx_k^2 converge. Il faut et il suffit pour qu'il en soit ainsi que la série Σu_k^2 converge. On a alors

$$\Phi(x) = u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_k x_k + \ldots.$$

Réciproquement, si u_0, u_1, ... sont des nombres réels tels que $\Sigma(u_k)^2$ converge, la série

$$u_0 + u_1 x_1 + \ldots + u_k x_k + \ldots$$

converge vers une fonction du premier degré dans Ω.

De même, appelons *fonction* au plus *du second degré* dans Ω une fonction $\Psi(x)$ continue dans Ω et telle que la quantité

$$\Psi(x + y + z) - \Psi(x + y) - \Psi(y + z) \\ - \Psi(z + x) + \Psi(x) + \Psi(y) + \Psi(z)$$

soit indépendante de x, y, z.

En posant

$$2\,G(x) \equiv \Psi(x) - \Psi(-x),$$

on aura

$$G(x + y + z) - G(x + y) - G(y + z) \\ - G(z + x) + G(x) + G(y) + G(z) = o,$$

avec

$$G(x) = - G(-x).$$

On tire de la deuxième relation $G(o) = o$, et en fai-

sant $z = -x - y$ dans la première,

$$G(0) - G(-z) - G(-x) - G(-y) + G(x) + G(y) + G(z) = 0,$$

d'où

$$G(x+y) - G(x) - G(y) = 0.$$

Ainsi $G(x)$ est une fonction au plus du premier degré, telle que $G(0) = 0$; elle est donc de la forme

$$G(x) \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots,$$

la série Σu_i^2 étant convergente. Posons maintenant

$$H(x) \equiv \Psi(x) - G(x) - \Psi(0).$$

On aura encore

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} &H(x+y+z) - H(x+y) - H(y+z) \\ &\quad - H(z+x) + H(x) + H(y) + H(z) = 0, \\ &\qquad H(0) = 0; \end{aligned} \right.$$

mais cette fois

$$H(x) = H(-x).$$

Faisons dans (22) $y = x$, $z = -x$; on aura

$$H(2x) = 4H(x).$$

On voit qu'on a $H(cx) = c^2 H(x)$ pour $c = 0, 1, 2$. Il est facile de montrer que, si l'égalité est vraie pour $c = 0, 1, 2, \ldots, n$, elle est vraie pour $c = n+1$; il suffit pour le voir de faire dans (22)

$$y = x, \qquad z = (n-1)x.$$

Ensuite, on démontre par la méthode bien connue de Cauchy que l'égalité

$$H(cx) = c^2 H(x),$$

ayant lieu pour tout nombre entier, a lieu pour tout nombre rationnel, puis pour tout nombre réel.

Soit maintenant a un point déterminé de Ω; la quantité

$$V(x, a) \equiv H(x+a) - H(x) - H(a)$$

est une fonction de x bien déterminée et continue dans Ω, et l'on a, en tenant compte de (22),

$$V(x+y, a) - V(x, a) - V(y, a) = 0 \qquad \text{et} \qquad V(0, a) = 0.$$

Donc $V(x, a)$ est une fonction homogène du premier degré par rapport à x. D'où, quels que soient les nombres réels $c_1, c_2, \ldots, c_n$ et les points $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ de Ω,

$$V(X, a) = c_1 V(x^{(1)}, a) + \ldots + c_n V(x^{(n)}, a),$$

avec

$$X \equiv c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \ldots + c_n x^{(n)}.$$

Ceci a lieu quel que soit le point a; alors, comme $V(x^{(k)}, a) = V(a, x^{(k)})$, on aura

$$\begin{aligned} V(X, X) &= c_1 V(X, x^{(1)}) + \ldots + c_n V(X, x^{(n)}) \\ &= c_1 [c_1 V(x^{(1)}, x^{(1)}) + c_2 V(x^{(2)}, x^{(1)}) + \ldots] + \ldots \\ &= \sum_1^n c_h c_j V(x^{(h)}, x^{(j)}). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$V(X, X) = H(2X) - H(X) - H(X) = 2H(X).$$

D'où, en définitive,

$$\begin{aligned} &H(c_1 x^{(1)} + \ldots + c_n x^{(n)}) \\ &\quad = \sum_{1}^{n}{}_{h,j} \left\{ c_h c_j \left[\frac{H(x^{(h)} + x^{(j)}) - H(x^{(h)}) - H(x^{(j)})}{2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

En particulier, avec les notations employées plus haut,

$$H(x^{(k)}) = \sum_{1}^{k}{}_{j,h} u_{h,j} x_i x_j,$$

avec

$$u_{h,j} = \frac{H(i^{(h)} + i^{(j)}) - H(i^{(h)}) - H(i^{(j)})}{2}.$$

Les $u_{h,j}$ sont des constantes déterminées quels que soient les entiers h, j et telles que $u_{h,j} = u_{j,h}$.

En passant à la limite, on voit que la série

$$\sum_1^\infty u_{h,j} x_i x_j$$

doit converger quel que soit le point x de Ω de coordonnées x_1, x_2, ..., et la limite est $H(x)$.

De sorte qu'*on obtient enfin l'expression générale des fonctions du second degré au plus dans* Ω *sous la forme*

$$\Psi(x) = u_0 + \sum_j{}_1^\infty u_j x_j + \sum_{j,h}{}_1^\infty u_{j,h} x_h x_j.$$

La méthode peut s'étendre aux fonctions du troisième degré, etc.

Application à la théorie des fonctions. — M. Riesz et M. Fischer ont démontré que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite infinie de nombres réels a_1, a_2, ... représente la suite des coefficients de Fourier d'une fonction d'une variable réelle sommable et de carré sommable est que la série

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + \ldots$$

soit convergente. Donc à tout point de Ω correspond une telle fonction ayant pour coefficients de Fourier les coordonnées du point, et inversement. Il faut remarquer que la fonction n'est déterminée que sauf peut-être pour un ensemble de valeurs de la variable de mesure nulle. Mais, si parmi les fonctions ayant des

coefficients de Fourier donnés, il existe une fonction continue, il n'en existe pas deux.

Ceci étant, on voit que *tous les théorèmes énoncés plus haut s'expriment en prenant comme éléments, non des points, mais des fonctions.*

Au lieu de dire qu'un point $a^{(n)}$ tend vers un point b, on dira qu'une fonction f_n converge en moyenne vers une fonction f et cela voudra dire que

$$\int_0^{2\pi} [f_n(x) - f(x)]^2 \, dx$$

tend vers o. Il suffit pour cela que $f_n(x)$ converge uniformément vers $f(x)$, mais ce n'est pas nécessaire.

[L²10f]

SUR LES POLYGONES INSCRITS ET CIRCONSCRITS A DES QUADRIQUES HOMOFOCALES;

Par M. R. BRICARD.

1. On doit à M. Darboux un beau théorème qui constitue une extension à l'espace de celui de Poncelet relatif aux polygones inscrits et circonscrits à des coniques. L'éminent géomètre, qui a fait connaître ce théorème en 1870 (¹), l'énonce ainsi qu'il suit dans ses *Leçons sur la théorie générale des surfaces* (t. II, p. 303) :

Si un polygone est circonscrit à deux surfaces homofocales et si ses sommets sont placés sur d'autres surfaces homofocales aux premières, de telle manière que la normale en chacun de ces sommets à la

(¹) *Bulletin de la Société philomathique*, t. VII, 1870, p. 92.

surface homofocale qui contient ce sommet soit la bissectrice intérieure de l'angle formé par les deux côtés de l'angle qui se croisent en ce sommet, il y aura une infinité de polygones ayant les mêmes propriétés, l'un quelconque des sommets de ces polygones pouvant se déplacer arbitrairement sur la surface qu'il est assujetti à décrire.

La démonstration de M. Darboux repose sur la considération d'un système abélien d'équations différentielles de la forme

$$\frac{du_1}{\sqrt{P(u_1)}} + \frac{du_2}{\sqrt{P(u_2)}} + \frac{du_3}{\sqrt{P(u_3)}} = 0,$$
$$\frac{u_1\,du_1}{\sqrt{P(u_1)}} + \frac{u_2\,du_2}{\sqrt{P(u_2)}} + \frac{u_3\,du_3}{\sqrt{P(u_3)}} = 0$$

[où $P(u)$ désigne un polynome du sixième degré], système qui s'intègre algébriquement, comme on sait. On peut également, comme l'a fait voir M. Staude ([1]), faire intervenir des fonctions Θ à quatre paires de périodes.

La démonstration que je vais développer est d'un caractère beaucoup plus élémentaire. La proposition à laquelle elle conduit n'est d'ailleurs pas identique, ainsi qu'on le verra, à la précédente. Dans cette dernière il est nettement spécifié que les normales aux diverses surfaces homofocales introduites sont les bissectrices *intérieures* des angles du polygone. Cette condition n'est pas exigée dans l'énoncé qui sera donné plus loin.

Les principes sur lesquels je m'appuierai sont très simples. Mais, pour donner à la démonstration toute la rigueur désirable, il est nécessaire de présenter en premier lieu quelques remarques sur les polygones circonscrits aux quadriques.

([1]) *Mathematische Annalen*, t. XXII, 1883, p. 1 et 145.

2. Soient (Q) une quadrique, $A_1 A_2 \ldots A_n$ un polygone de n côtés circonscrit à cette quadrique. Appelons $B_1, B_2, \ldots, B_n$ les points de contact respectifs des côtés A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1. Le théorème de Carnot fournit immédiatement la relation

$$\left(\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\right)^2 \left(\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\right)^2 \cdots \left(\frac{A_nB_n}{B_nA_1}\right)^2 = 1,$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{A_1B_1}{B_1A_2}\,\frac{A_2B_2}{B_2A_3} \cdots \frac{A_nB_n}{B_nA_1} = \pm 1.$$

On voit donc qu'il existe deux espèces de polygones circonscrits à (Q) : ceux pour lesquels l'égalité (1) a lieu avec le signe + dans le second membre, ceux pour lesquels elle a lieu avec le signe —. Je dirai que les polygones de la première catégorie sont *régulièrement circonscrits* et que ceux de la deuxième catégorie sont *irrégulièrement circonscrits* à (Q).

Cela posé, considérons une quadrique (Q) et un polygone $A_1A_2 \ldots A_n$ circonscrit (régulièrement ou non) à cette quadrique. Soient toujours $B_1, B_2, \ldots, B_n$ les points de contact des côtés successifs A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1. On a

$$(2) \qquad \frac{A_1B_1}{B_1A_2}\,\frac{A_2B_2}{B_2A_3} \cdots \frac{A_nB_n}{B_nA_1} = \varepsilon,$$

ε étant égal à ± 1 suivant que le polygone $A_1A_2 \ldots A_n$ est régulièrement ou irrégulièrement circonscrit à (Q).

Appelons $D_2, D_3, \ldots, D_n, D_1$ (*fig.* 1) les droites conjuguées par rapport à (Q) des droites B_1B_2, B_2B_3, ..., B_nB_1 : la droite D_i passe par le point A_i.

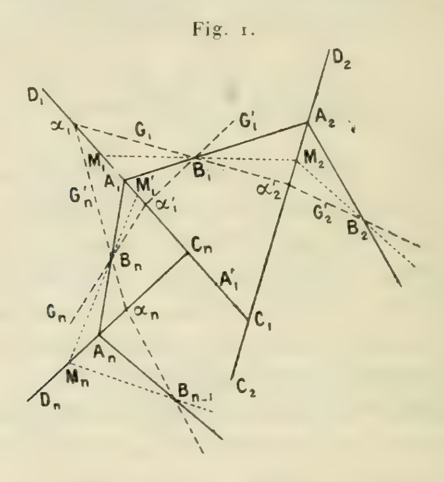
Les droites D_i et D_{i+1} étant toutes deux situées dans le plan tangent à (Q) au point B_i se rencontrent en un point C_i. Les droites $D_1, D_2, \ldots, D_n$ sont ainsi les côtés consécutifs d'un polygone $C_nC_1C_2 \ldots C_{n-1}$, auquel est inscrit le polygone $A_1A_2 \ldots A_n$. Je vais dé-

montrer la relation

$$(3) \qquad \frac{C_n A_1}{A_1 C_1} \frac{C_1 A_2}{A_2 C_2} \cdots \frac{C_{n-1} A_n}{A_n C_n} = (-1)^n \varepsilon.$$

A cet effet considérons un point M_1 variable sur D_1. Joignons-le à B_1 et soit M_2 le point de rencontre de

Fig. 1.



$M_1 B_1$ avec D_2. Soit de même M_3 le point de rencontre de $M_2 B_2$ avec D_3 et ainsi de suite. Le point M_n obtenu sur D_n étant joint à B_n, la droite $M_n B_n$ rencontre D_1 en un point M'_1. Il est clair que M_1 et M'_1 engendrent sur D_1 des divisions homographiques dont A_1 est un point double. Nous allons chercher à préciser davantage la nature de la correspondance entre les points M_1 et M'_1. Pour cela on aura recours à la considération des génératrices de la quadrique (Q). Ces génératrices se répartissent en deux systèmes, et je désignerai par G_i et G'_i les génératrices passant par le point B_i et appartenant respectivement à ces deux systèmes. G_i et G'_i rencontrent la droite D_i aux deux points d'intersection α_i et α'_i de cette droite avec (Q); G_{i-1} et G'_{i-1} passent respectivement par α'_i et α_i.

D'après cela, si le point M_1 vient en α_1, le point M_2 vient en α'_2, le point M_3 en α_3, et ainsi de suite. Il y a maintenant deux cas à distinguer.

1° *n est pair*. Alors M_1 étant venu en α_1, M_n vient en α'_n et M'_1 vient en α_1. De même, si M_1 vient en α'_1, M'_1 vient aussi en α'_1. On voit donc que les divisions homographiques engendrées par M_1 et M'_1 ont trois points doubles A_1, α_1 et α'_1. Ceci ne peut avoir lieu que si ces divisions sont confondues. Ainsi, lorsque n est pair, M'_1 se confond avec M_1, quelle que soit la position de ce dernier point. Autrement dit, il existe une infinité de polygones ayant leurs sommets sur D_1, D_2, ..., D_n et dont les côtés passent respectivement par les points B_1, B_2, ..., B_n.

2° *n est impair*. Alors, si le point M_1 vient en α_1, M_n vient en α_n et M'_1 en α'_1. De même, si le point M_1 vient en α'_1, M'_1 vient en α_1. On conclut de là que dans le cas actuel M_1 et M'_1 engendrent des divisions en involution, définies par la conditon que A_1 est un point double et que α_1 et α'_1 sont un couple de points conjugués.

Le second point double de l'involution est le point A'_1, conjugué harmonique de A_1 par rapport à $\alpha_1\alpha'_1$. M_1 et M'_1 étant deux points correspondants quelconques, on a

$$\frac{A_1 M_1}{A_1 M'_1} = -\frac{A'_1 M_1}{A'_1 M'_1}.$$

En particulier, si $A_1 M_1$ et $A_1 M'_1$ sont infiniment petits, le second membre se réduit à -1 et l'on a

$$A_1 M'_1 = - A_1 M_1.$$

On peut donc énoncer le résultat suivant, valable que n soit pair ou impair :

Si le point M_1 *est infiniment voisin du point* A_1,

le point M'_1, *obtenu par la construction indiquée plus haut, est tel que l'on ait*

(4) $$A_1M'_1 = (-1)^n A_1M_1.$$

Il est maintenant facile de démontrer la relation (3). Supposons toujours le point M_1 infiniment voisin du point A, et appliquons le théorème classique des transversales au triangle $A_1C_1A_2$, coupé par la transversale $M_1B_1M_2$, au triangle $A_2C_2A_3$, coupé par la transversale $M_2B_2M_3$, et ainsi de suite. On a

$$\frac{M_1A_1}{M_1C_1}\,\frac{B_1A_2}{B_1A_1}\,\frac{M_2C_1}{M_2A_2} = 1.$$

Comme M_1C_1 diffère infiniment peu de A_1C_1 et M_2C_1 infiniment peu de A_2C_1, on peut écrire

$$\frac{M_1A_1}{A_1C_1}\,\frac{B_1A_2}{B_1A_1}\,\frac{A_2C_1}{M_2A_2} = 1,$$

ou encore

$$\frac{C_1A_2}{A_1C_1} = \frac{A_2M_2}{A_1M_1}\,\frac{A_1B_1}{B_1A_2}.$$

De même

$$\frac{C_2A_3}{A_2C_2} = \frac{A_3M_3}{A_2M_2}\,\frac{A_2B_2}{B_2A_3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{C_{n-1}A_n}{A_{n-1}C_{n-1}} = \frac{A_nM_n}{A_{n-1}M_{n-1}}\,\frac{A_{n-1}B_{n-1}}{B_{n-1}A_n},$$

et enfin

$$\frac{C_nA_1}{A_nC_n} = \frac{A_1M'_1}{A_nM_n}\,\frac{A_nB_n}{B_nA_1}.$$

Multiplions ces relations membre à membre, en tenant compte de (2) et de (4); il vient

$$\frac{C_nA_1}{A_1C_1}\,\frac{C_1A_2}{A_2C_2}\cdots\frac{C_{n-1}A_n}{A_nC_n} = (-1)^n\varepsilon,$$

ce qui est bien la relation (3) dont la suite montrera l'importance.

3. Soient maintenant deux quadriques homofocales (Q) et (Q′). Par un point M de l'espace on peut leur mener quatre tangentes communes MT_1, MT_2, MT_3 et MT_4, qui sont les quatre génératrices communes aux deux cônes (S) et (S′) de même sommet M, circonscrits respectivement à (Q) et à (Q′). Or ces deux cônes ont, comme l'on sait, les mêmes axes principaux, qui sont les normales aux trois surfaces homofocales à (Q) et (Q′), qui passent par le point M. Les symétriques de l'une des tangentes communes, MT_1 par exemple, par rapport à ces trois axes, sont respectivement MT_2, MT_3 et MT_4.

Si l'on se donne *a priori* le couple des tangentes MT_1 et MT_2, celui des axes principaux des cônes (S) et (S′) par rapport auxquels ces tangentes sont symétriques est parfaitement déterminé, et il en est de même de la surface homofocale qui a cet axe pour normale. Nous dirons que cette surface *appartient* au couple de tangentes communes MT_1, MT_2.

Cela posé, considérons un polygone $A_1 A_2 \ldots A_n$ circonscrit à la fois aux quadriques (Q) et (Q′). Nous désignerons par B_1, B_2, ..., B_n les points de contact des côtés avec (Q), et par B'_1, B'_2, ..., B'_n les points de contact avec (Q′). Soit (Q_1) la quadrique homofocale à (Q) et (Q′), qui passe par le point A_1 et qui appartient aux tangentes communes $A_1 A_2$ et $A_1 A_n$. Soient (Q_2), ..., (Q_n) les quadriques analogues passant respectivement par les points A_2, ..., A_n.

Déplaçons infiniment peu et d'une façon quelconque le point A_1 sur la quadrique (Q_1). Soit M_1 sa nouvelle position. Les points A_2, A_3, ..., A_n éprouvent, par suite de ce déplacement, des déplacements infiniment petits sur les quadriques correspondantes et viennent respectivement en M_2, M_3, ..., M_n. Le dernier côté du polygone, $A_n A_1$, devient $M_n M'_1$, M'_1 étant infiniment

voisin de A_1. Nous allons chercher la relation qui existe entre M_1 et M'_1.

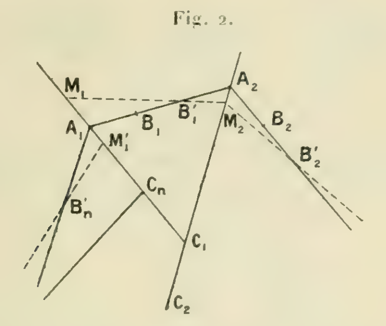
Remarquons tout d'abord que les plans tangents menés aux quadriques (Q) et (Q′) par les côtés successifs du polygone $A_1 A_2 \ldots A_n$ ont leurs traces sur les plans tangents aux quadriques (Q_1), (Q_2), ..., (Q_n) confondus deux à deux. Par exemple, les plans tangents menés à (Q) par $A_1 A_2$ et $A_2 A_3$ (plans dont B_1 et B_2 sont les points de contact) ont même trace sur le plan tangent à (Q_2) au point A_2. En effet, $A_1 A_2$ et $A_2 A_3$ sont sur le cône (S), circonscrit à (Q) et de sommet A_2, deux génératrices symétriques par rapport à l'un des axes principaux de ce cône. Les plans tangents à (S), c'est-à-dire à (Q), menés par $A_1 A_2$ et $A_2 A_3$ sont aussi symétriques par rapport à cet axe, et par suite ont leurs traces sur le plan principal perpendiculaire confondues : or ce plan principal n'est autre que le plan tangent à (Q_2), d'après la manière dont cette quadrique a été choisie.

Les traces des plans tangents à (Q) aux points B_1, B_2, ..., B_n sur les plans tangents respectivement à (Q_1), (Q_2), ..., (Q_n), aux points A_1, A_2, ..., A_n, forment donc un polygone $C_n C_1 C_2 \ldots C_{n-1}$, qui donne lieu, ainsi qu'on l'a vu, à la relation (3) écrite plus haut.

Supposons maintenant que le déplacement infiniment petit $A_1 M_1$ donné au point A_1 soit dirigé suivant $C_n C_1$ (*fig.* 2). Il résulte de propriétés classiques que $A_1 A_2$ engendre alors un élément de surface développable dont le point central est le point B'_1. Le déplacement correspondant $A_2 M_2$ du second sommet A_2 du polygone est dirigé suivant $C_1 C_2$. Mais cette dernière droite est, comme on vient de le voir, dans le plan tangent à (Q) au point B_2. $A_2 A_3$ va donc encore engendrer un élément de surface développable, ayant pour point central le point B'_2, et ainsi de suite. Ainsi le

fait que le premier côté du polygone engendre un élément de surface développable entraîne la même propriété pour tous les côtés suivants ([1]).

Fig. 2.



Il résulte de là que le point A_1 ayant reçu le déplacement particulier A_1M_1 dont il s'agit, dirigé suivant C_nC_1, le point M'_1 sera aussi situé sur C_nC_1. Cherchons maintenant la relation qui existe entre les longueurs des segments A_1M_1 et $A_1M'_1$: le calcul est en tous points semblable à celui du numéro précédent.

M_1M_2 pouvant être considérée comme rencontrant A_1A_2 au point B'_1, on a, par le théorème des transversales,

$$\frac{M_1A_1}{M_1C_1}\,\frac{B'_1A_2}{B'_1A_1}\,\frac{M_2C_1}{M_2A_2}=1,$$

ou, en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur,

$$\frac{M_1A_1}{A_1C_1}\,\frac{B'_1A_2}{B'_1A_1}\,\frac{A_2C_1}{M_2A_2}=1.$$

ou encore

$$\frac{A_2M_2}{A_1M_1}=\frac{C_1A_2}{A_1C_1}\,\frac{B'_1A_2}{A_1B'_1}.$$

([1]) M. Darboux fait cette remarque dans sa *Théorie des surfaces* (t. II, p. 289).

De même

$$\frac{A_3 M_3}{A_2 M_2} = \frac{C_2 A_3}{A_2 C_2} \frac{B'_2 A_3}{A_2 B'_2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{A_n M_n}{A_{n-1} M_{n-1}} = \frac{C_{n-1} A_n}{A_{n-1} C_{n-1}} \frac{B'_{n-1} A_n}{A_{n-1} B'_{n-1}},$$

$$\frac{A_1 M'_1}{A_n M_n} = \frac{C_n A_1}{A_n C_n} \frac{B'_n A_1}{A_n B'_n}.$$

En multipliant membre à membre les égalités précédentes, il vient, en tenant compte des relations (1) et (3),

$$\frac{A_1 M'_1}{A_1 M_1} = (-1)^n \varepsilon\varepsilon',$$

ε' étant égal à ± 1, suivant que le polygone $A_1 A_2 \dots A_n$ est régulièrement ou irrégulièrement circonscrit à la quadrique (Q').

De même, donnons au point A_1 le déplacement infiniment petit $A_1 N_1$ dirigé suivant la trace $A_1 C'_1$ du plan tangent à (Q') en B'_1 sur le plan tangent à (Q_1). L'extrémité du $n^{\text{ième}}$ côté du polygone viendra en N'_1, situé sur $A_1 N_1$ et tel que l'on ait

$$\frac{A_1 N'_1}{A_1 N_1} = (-1)^n \varepsilon\varepsilon'.$$

Donnons enfin à A_1 le déplacement infiniment petit quelconque $A_1 P_1$ dans le plan tangent à (Q_1). L'extrémité du $n^{\text{ième}}$ côté du polygone vient en P'_1. Rapportons les points P_1 et P'_1 aux axes $A_1 C_1$ et $A_1 C'_1$; soient u et v les coordonnées du premier point, u' et v' celles du second; u' et v' sont fonctions de u et v, et, comme ces dernières variables sont infiniment petites, on peut écrire

$$u' = Au + Bv,$$
$$v' = Cu + Dv,$$

A, B, C, D étant des coefficients que nous allons dé-

terminer. A cet effet faisons $v = 0$; on doit alors avoir, comme on a vu,

$$u' = (-1)^n \varepsilon\varepsilon' u, \qquad v' = 0,$$

d'où l'on tire

$$A = (-1)^n \varepsilon\varepsilon', \qquad C = 0.$$

On trouve de même

$$B = 0, \qquad D = (-1)^n \varepsilon\varepsilon'.$$

On a donc

$$(5) \qquad \begin{cases} u' = (-1)^n \varepsilon\varepsilon' u, \\ v' = (-1)^n \varepsilon\varepsilon' v. \end{cases}$$

Distinguons maintenant deux cas :

1° On a

$$(-1)^n \varepsilon\varepsilon' = +1.$$

Les relations (5) sont alors

$$u' = u, \qquad v' = v.$$

Le point P'_1 est confondu avec le point P_1. Ainsi, lorsque l'on donne au premier sommet du polygone un déplacement infiniment petit quelconque dans le plan tangent à (Q_1), l'extrémité du dernier côté ne cesse pas d'être en coïncidence avec ce premier sommet. On peut ensuite donner à ce même premier sommet un nouveau déplacement infiniment petit, sans que le polygone cesse d'être fermé, et ainsi de suite. On voit donc qu'il existe une infinité de polygones de n côtés circonscrits à (Q) et (Q') et ayant leurs sommets sur les quadriques (Q_1), (Q_2), ..., (Q_n), l'un des sommets pouvant occuper une position arbitraire sur la quadrique correspondante.

2° On a

$$(-1)^n \varepsilon\varepsilon' = -1.$$

Les relations (5) sont alors

$$u' = -u, \qquad v' = -v,$$

et le point P'_1 est symétrique du point P_1 par rapport à A_1. Ainsi, quand on déplace arbitrairement le premier sommet du polygone, celui-ci cesse d'être fermé. Mais menons du point P'_1 une tangente commune à (Q) et (Q'), rencontrant le plan tangent à (Q_2) en un point P'_2 infiniment voisin du point P_2, et ainsi de suite. On arrivera finalement à un point P'_n infiniment voisin du point P_n et à un point P''_1, dont les coordonnées satisfont aux relations

$$u'' = -u' = u, \qquad v'' = -v' = v.$$

Le point P''_1 est confondu avec le point P_1, et l'on a construit un polygone fermé de $2n$ côtés, circonscrit aux quadriques (Q) et (Q') et ayant ses sommets opposés situés deux à deux sur les quadriques (Q_1), (Q_2), ..., (Q_n).

Ce polygone est régulièrement circonscrit à chacune des quadriques (Q) et (Q'). En effet, les deux côtés opposés P_iP_{i+1} et $P'_iP'_{i+1}$ touchent (Q), par exemple, en deux points β_i et β'_i infiniment voisins. Les deux rapports $\frac{P_i\beta_i}{\beta_iP_{i+1}}$ et $\frac{P'_i\beta'_i}{\beta'_iP'_{i+1}}$ sont donc de même signe, et le produit $\prod \frac{P_i\beta_i}{\beta_iP_{i+1}}$ étendu à tout le polygone a bien le signe $+$.

Ce polygone satisfait donc à la condition examinée dans le premier cas : le produit analogue à $(-1)^n\varepsilon\varepsilon'$ est pour lui égal à $+1$. On pourra donc construire une infinité de polygones de 2^n côtés circonscrits à (Q) et (Φ') et ayant leurs sommets opposés situés deux à deux sur (Q_1), (Q_2), ..., (Q_n).

En résumant les résultats de l'analyse précédente, nous parvenons à ce théorème :

Soient (Q) *et* (Q') *deux quadriques homofocales,* Π *un polygone de* n *côtés circonscrit à la fois à* (Q)

et à (Q'), ε *un nombre égal à* $+1$ *ou à* -1 *suivant que* Π *est régulièrement ou irrégulièrement circonscrit à* (Q), ε' *un nombre analogue relatif à* (Q'). *Soient* (Q_1), (Q_2), ..., (Q_n) *n quadriques homofocales aux deux premières, passant respectivement par les sommets du polygone* Π, *chaque quadrique appartenant aux deux côtés qui se croisent au sommet correspondant. Cela posé :*

1° *Si le produit* $(-1)^n\varepsilon\varepsilon'$ *est égal à* $+1$, *il existe une infinité de polygones de n côtés circonscrits à* (Q) *et* (Q') *et ayant leurs sommets respectivement sur* (Q_1), (Q_2), ..., (Q_n), *l'un des sommets pouvant être pris arbitrairement sur la quadrique correspondante.*

2° *Si le produit* $(-1)^n\varepsilon\varepsilon'$ *est égal à* -1, *il existe une infinité de polygones de* $2n$ *côtés circonscrits à* (Q) *et* (Q') *et ayant leurs sommets opposés situés deux à deux sur* (Q_1), (Q_2), ..., (Q_n). *Le polygone de n côtés d'où l'on est parti doit être considéré comme un polygone de* $2n$ *côtés dont les sommets opposés sont confondus deux à deux.*

Par exemple, coupons les deux quadriques (Q) et (Q') par un plan quelconque. Soient C et C' les deux coniques d'intersection; construisons un triangle circonscrit à la fois à C et C' : ce triangle est régulièrement circonscrit à chacune des quadriques (car un triangle ne peut être irrégulièrement circonscrit à une quadrique que si les points de contact des côtés sont en ligne droite, et cela exige que la quadrique soit un cône). Par conséquent, le produit $(-1)^n\varepsilon\varepsilon'$ est ici égal à -1, et, si l'on considère les quadriques (Q_1), (Q_2), (Q_3) passant par les trois sommets du triangle, il existe une infinité d'*hexagones* ayant leurs sommets opposés situés deux à deux sur ces trois quadriques et circonscrits à (Φ) et

(Φ'). Le triangle d'où l'on est parti doit être considéré comme un tel hexagone ayant ses sommets opposés confondus.

4. Il va sans dire que le théorème démontré, étant d'une nature essentiellement projective, s'étend à des quadriques faisant partie d'un faisceau tangentiel. Il faut seulement, (Q) et (Q') étant deux quadriques du faisceau, définir ce qu'il faut entendre par quadrique du même faisceau passant par un point M et *appartenant* à un couple donné de tangentes communes à (Q) et (Q') issues du point M.

Soient (S) et (S') les deux cônes de sommet M circonscrits à (Q) et (Q'). Les quatre génératrices communes à ces deux cônes, MT_1, MT_2, MT_3 et MT_4, sont les tangentes communes à (Q) et (Q') issues du point M. Considérons deux de ces tangentes, MT_1 et MT_2 par exemple. Le pôle de leur plan par rapport à chacune des quadriques (Q) et (Q') est dans le plan tangent à l'une des trois quadriques du faisceau qui passent par M. Cette quadrique, ainsi parfaitement déterminée, sera dite appartenir au système des deux tangentes MT_1 et MT_2.

Dans le cas où le faisceau tangentiel considéré est un système de quadriques homofocales, on se rend compte immédiatement de l'identité de la nouvelle définition avec celle qui a été donnée plus haut.

Remarquons que la démonstration du théorème aurait pu être donnée sans modification pour le cas général où les quadriques considérées appartiennent à un faisceau tangentiel quelconque : en effet, nous n'avons fait intervenir aucune des propriétés métriques spéciales aux quadriques homofocales.

[O2e]

SUR LE CENTRE DE COURBURE D'UNE ROULETTE;

PAR M. A. PELLET.

Soit A un point d'une figure plane invariable de forme se déplaçant sur son plan; pour une position de la figure, soient I le centre instantané, et a, α, i les distances du point I à A, au centre de courbure (α) de la courbe que décrit A et au point d'intersection de IA avec le cercle des inflexions. On a

$$a\alpha + i(a - \alpha) = 0.$$

Cette équation se déduit facilement des *remarques sur le mouvement d'une figure plane* exposées dans le *Bulletin de la Société mathématique* (1907), p. 252.

Il en résulte que, connaissant le cercle des inflexions, on construira facilement α étant donné a, a étant donné α, et i étant donnés I, a et α. Dans le cas où se place M. Farid Boulad (numéro de mars 1908, p. 128) de la connaissance de A, (α), B, (β), on déduit I, puis les points d'intersection de IA et IB avec le cercle des inflexions qu'on peut dès lors construire puisqu'on en possède trois points.

Je saisis l'occasion pour rectifier la rédaction du n° 4 de l'article précité. Soient C le cône lieu des axes instantanés de rotation d'un solide, mobile autour d'un point fixe O, dans l'espace; C' le cône lieu de cet axe dans le solide; OM la génératrice de contact des deux cônes, axe instantané à l'instant considéré. Menons par le point M un plan perpendiculaire à OM; ce plan coupe le cône C suivant une courbe B et le cône C'

suivant une courbe B′; soit A un point du solide situé dans ce plan; l'axe du plan osculateur de la courbe sphérique décrite par A dans le mouvement du solide passe par le centre de courbure de la courbe plane décrite par A en faisant rouler B′ sur B; de sorte que cette courbe plane a un contact du second ordre avec le cône décrit par la droite OA.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1745.

(1896, p. 440.)

On pose

$$\alpha_n = (ax^2 + bx + c)(2ax^2 + bx + c)\ldots(nax^2 + bx + c).$$

1° *Démontrer que l'expression*

$$1 + C_n^1 \alpha_1 + C_n^2 \alpha_2 + \ldots + C_n^n \alpha_n$$

peut se mettre sous la forme

$$(c+1)^n + P_1 x(c+1)^{n-1} + P_2 x^2 (c+1)^{n-2} + \ldots + P_n x^n,$$

P_p *étant un polynome entier en* a, b, x *indépendant de* c.

2° *Pour* $x = 0$, $(P_n)_{x=0}$ *est un polynome entier en* a *et* b. *Trouver ce polynome développé par rapport aux puissances décroissantes de* b. *Démontrer que si* a *est positif, ce polynome, considéré comme fonction de* b, *a toutes ses racines réelles; si* a *est négatif, il a au plus une racine réelle.* (R. Gilbert.)

SOLUTION

Par M. R. Gilbert.

1° Considérons la suite $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ définie par

$$u_1 = (h+k)u_0,$$

(1) $$u_n = (hn+k)u_{n-1} - h(n-1)u_{n-2};$$

proposons-nous de calculer u_n en fonction de n.

De la relation (1) on déduit

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n = [h(n+1)+k-1]\,u_n - hnu_{n-1}$$

ou

$$\Delta u_n = [h(n+1)+k]\,\Delta u_{n-1} - h(n-1)\,\Delta u_{n-2}.$$

On voit que cette relation est de la même forme que (1). Alors, en appliquant p fois le même calcul, on trouve

$$\Delta^p u_n = [h(n+p)+k)\,\Delta^p u_{n-1} - h(n-1)\,\Delta^p u_{n-2},$$

ce qui donne en particulier la relation

$$\Delta^{p+1} u_0 = [h(p+1)+k-1]\,\Delta^p u_0,$$

et, par suite, en posant

$$(2)\qquad \beta_p = (h+k-1)(2h+k-1)\ldots(ph+k-1),$$

on a

$$\Delta_p u_0 = u_0\,\beta_p,$$

c'est-à-dire, pour u_n,

$$u_n = u_0(1 + C_n^1\beta_1 + C_n^2\beta_2 + \ldots + C_n^n\beta_n)$$

ou encore symboliquement (Lucas, *Théorie des nombres*, Chap. XIII),

$$u_n = u_0(1+\beta)^{(n)}.$$

Les formules (1), (2) peuvent être modifiées de la façon suivante.

Posons

$$u_n = v_n y^n,$$

y étant pour le moment un paramètre arbitraire.

Alors

$$v_n = \left(\frac{h}{y}n + \frac{k}{y}\right)v_{n-1} - \frac{h}{y^2}(n-1)\,v_{n-2},$$

et il est facile de voir que les relations (1) et (2) pourront s'identifier avec les suivantes :

$$(3)\qquad v_n = (anx+b)\,v_{n-1} + ac(n-1)\,v_{n-2},$$

$$(4)\qquad \alpha_p = (ax^2+bx+c)(2ax^2+bx+c)\ldots(nax^2+bx+c).$$

Il suffit de déterminer y, h et k de façon que

$$k = by,$$
$$x = -cy,$$
$$h = -acy^2,$$
$$\alpha_p = (-c)^p \beta_p,$$

et la relation entre les u et les β devient

$$v_n x^n = (\alpha - c)^{(n)}.$$

D'où l'on déduit

$$\alpha^{(n)} = (vx + c)^{(n)},$$

puis

$$(\alpha + 1)^{(n)} = (vx + c + 1)^{(n)}.$$

Si donc on pose

$$Q_n = 1 + C_n^1 \alpha_1 + C_n^2 \alpha_2 + \ldots + C_n^n \alpha_n,$$

on a

$$Q_n = (c+1)^n v_0 + C_n^1 v_1 x (c+1)^{n-1} + \ldots$$
$$+ C_n^p v_p x^p (c+1)^{n-p} + \ldots + C_n^n v_n x^n.$$

Nous n'avons pas encore pour Q_n le développement indiqué dans l'énoncé, car, d'après (3), v_p est un polynome en α, b, x, etc.

Mais remarquons qu'il résulte de cette même relation (3) que v_{2p} et v_{2p+1} sont des polynomes en $(c+1)$ de degré p, c'est-à-dire que

$$v_p = V_p^0 + V_p^1 (c+1) + V_p^2 (c+1)^2 + \ldots + V_p^{p-q} (c+1)^{p-q},$$

V_p^k étant un polynome en a, b, x indépendant de c. Remplaçons dans Q_n ; on voit que le coefficient de $(c+1)^{n-p}$, en supposant Q_n ordonné par rapport aux puissances de $(c+1)$, est

$$x^p (C_n^p V_p^0 - x C_n^{p+1} V_{p+1}^1 + x^2 C_n^{p+2} V_{p+2}^2 + \ldots) = x^p P_p.$$

2° L'expression de P_p pour $x = 0$ est le produit par C_n^p de V_p^0 où l'on fait $x = 0$, ou encore le produit par C_n^p de v_p où l'on fait à la fois $x = 0$ et $c = -1$. Dans ces conditions, la relation (3) devient

$$v_n = b v_{n-1} - a(n-1) v_{n-2}.$$

Nous avons à étudier les polynomes v_n considérés comme

fonctions de b. Or d'abord, si a est positif, ces polynomes jouissent des propriétés des suites de Sturm, et par conséquent ont toutes leurs racines réelles. Pour voir ce qui arrive lorsque a est négatif, calculons d'abord les polynomes v_n ordonnés en b.

Il est facile de voir que si l'on pose

$$w_1 = (b - 1)\,w_0 = (b - 1)\,v_0,$$

puis

$$w_n = (b - 1)\,w_{n-1} - a(n - 1)\,w_{n-2},$$

on a

$$v_n = (w + 1)^n,$$

ce qui permet de calculer v_n :

$$v_n = \left[b^n - \frac{n(n-1)}{2} b^{n-2} a + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4} b^{n-4} a^2 + \ldots \right] v_0.$$

Si a est négatif : 1° si n est pair, v_n est toujours positif; 2° si n est impair, v_n est le produit par b d'une quantité positive. Donc v_n a, dans ce cas, au plus une racine réelle, qui est nulle.

2070.

(1907, p. 9)

A quelles conditions doit satisfaire un tétraèdre pour que les droites qui joignent chaque sommet au centre du cercle circonscrit à la face opposée f appartiennent à un même hyperboloïde? (D[r] P. Zeemann.)

SOLUTION

Par M. Tètu.

J'applique en chaque sommet du tétraèdre trois forces dirigées respectivement suivant les arêtes de ce sommet. Je vais déterminer ces forces de façon que les trois qui sont appliquées en un même sommet se composent suivant la droite joignant ce sommet au centre du cercle circonscrit de la face opposée. Et je chercherai les conditions pour que le tétraèdre soit en équilibre sous l'action d'un tel système.

D'ailleurs, pour qu'un système de forces appliquées suivant

les arêtes d'un tétraèdre soit en équilibre, il faut et il suffit que les forces dirigées suivant chaque arête se fassent équilibre.

Cela posé, soient ABCD le tétraèdre, β, γ, δ les angles de la face opposée à β et, de même, α'', β'', δ; α''', β''', γ'''. On reconnaît facilement que, pour que les trois forces appliquées en A aient leur résultante suivant la droite indiquée, elles doivent être proportionnelles à

$$AB.\sin 2\beta,\quad AC.\sin 2\beta,\quad AD.\sin 2\delta.$$

Donc, pour que le tétraèdre réponde à la question, on devra avoir

$$\frac{\sin 2\alpha'}{\lambda} = \frac{\sin 2\beta}{\mu},\qquad \frac{\sin 2\alpha''}{\lambda} = \frac{\sin 2\gamma}{\nu},\qquad \frac{\sin 2\alpha'''}{\lambda} = \frac{\sin 2\delta}{\rho},$$

$$\frac{\sin 2\beta''}{\mu} = \frac{\sin 2\gamma}{\nu},\qquad \frac{\sin 2\beta'''}{\mu} = \frac{\sin 2\delta'}{\rho},\qquad \frac{\sin 2\gamma'''}{\nu} = \frac{\sin 2\gamma''}{\rho}.$$

Éliminons γ, μ, ν, ρ entre ces 6 équations :

$$\sin 2\alpha' \sin 2\beta'' \sin 2\gamma = \sin 2\alpha'' \sin 2\beta \sin 2\gamma',$$
$$\sin 2\alpha'' \sin 2\gamma''' \sin 2\delta = \sin 2\alpha''' \sin 2\gamma \sin 2\delta',$$
$$\sin 2\alpha''' \sin 2\beta \sin 2\delta' = \sin 2\alpha' \sin 2\beta \sin 2\delta.$$

Telles sont les conditions demandées.

QUESTIONS.

2096. On considère une épi- (hypo-) cycloïde ayant R pour rayon du cercle fixe O (*de base*) et R′ pour rayon du cercle mobile C et telle que $R' = \frac{R}{m}$, m étant un nombre entier. L'aire de la podaire de la courbe par rapport à un point quelconque de la circonférence d'un cercle concentrique au cercle O et de rayon ρ est constante et a pour expression

$$U = \frac{\pi(R \pm 2R')}{4R'}[(R \pm 2R')^2 + \rho^2],$$

le signe + s'appliquant à une épicycloïde et le signe — à une hypocycloïde. (E.-N. BARISIEN.)

[M²4d]

SUR LES SURFACES DE STEINER ;

Par M. Gaston COTTY,
Élève à l'École Normale supérieure.

Soient f_1, f_2, f_3, f_4 quatre polynomes homogènes et du second degré par rapport à trois variables x, y, z, entre lesquels il n'existe aucune relation linéaire.

Posons

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = f_1(x, y, z), \\ Y = f_2(x, y, z), \\ Z = f_3(x, y, z), \\ T = f_4(x, y, z). \end{array} \right.$$

X, Y, Z et T sont les coordonnées d'un point d'une surface de Steiner (Σ).

L'étude de ces surfaces, faite par Clebsch (*Journal de Crelle*, 1867), a déjà fait l'objet d'une Note de M. Lacour [1], qui a étudié le cas général.

Je me propose de faire la discussion de la nature de ces surfaces en me plaçant à un point de vue différent de celui de Clebsch.

A toute surface de Steiner (Σ) on peut faire correspondre le faisceau ponctuel du troisième ordre (F) ayant pour coniques de base, rapportées à un triangle de référence quelconque dans un plan auxiliaire, les courbes $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, $f_4 = 0$, les sections planes de (Σ) ayant pour images sur ce plan les coniques de (F) et un changement du tétraèdre de réfé-

[1] *Nouvelles Annales*, 1898, p. 437 et 499.

rence auquel est rapporté (Σ) ayant simplement pour effet de remplacer les expressions de O, Y, Z et T par les premiers membres des équations de quatre autres coniques quelconques du faisceau (F) n'appartenant pas à un même réseau ponctuel.

Ceci rappelé, nous voyons que (Σ) est caractérisée par le faisceau ponctuel (F), ou mieux par le faisceau tangentiel linéaire (Φ), contravariant du faisceau (F).

C'est à la discussion de la nature de ce faisceau tangentiel que nous rapporterons la classification des surfaces de Steiner. La discussion sera ainsi plus complète et bien plus simple, particulièrement en ce qui concerne les surfaces cubiques réglées.

La signification géométrique de (Φ) résulte du théorème suivant, que je rappellerai en quelques mots :

Les coniques (Γ) *du faisceau* (Φ) *sont les images des lignes asymptotiques de la surface.*

En effet, d'un point quelconque m, on peut mener aux courbes (Γ) deux tangentes formant un faisceau en involution. Il existe donc deux droites (les rayons doubles de l'involution précédente), D_1 et D_2, formant une conique harmoniquement circonscrite à toutes les coniques (Γ) et appartenant par conséquent au faisceau (F). Cette conique ($D_1 + D_2$) est l'image d'une section de Σ par un plan (Π) passant par le point M dont m est l'image. On voit aisément que cette section a un point double en M et que (Π) est le plan tangent à Σ en M.

Une droite ne pouvant être l'image que d'une conique ou d'une droite de (Σ), la section de (Σ) par le plan tangent (Π) ne peut se composer que de deux coniques, ou une droite et une conique, ou deux droites. Les deux asymptotiques en M seront tangentes

à ces deux courbes, et leurs images seront tangentes en m à (D_1) et (D_2). On sait que (D_1) et (D_2) sont les tangentes en m aux deux coniques du faisceau (Φ) passant par m, et l'on en déduit immédiatement que les coniques (Γ) sont images des asymptotiques de (Σ).

Quand D_1 et D_2 sont confondues pour certaines positions particulières de m, elles correspondent en général à des lignes doubles ou à des sections par des plans tangents singuliers touchant Σ suivant une conique double.

Nous sommes conduits à distinguer six cas fondamentaux suivant que les coniques du faisceau Φ sont :

1° Tangentes à quatre droites distinctes;

2° Tangentes à deux droites et tangentes à une troisième droite en un point fixe;

3° Osculatrices en un point et tangentes à une droite;

4° Bitangentes;

5° Surosculatrices en un point;

6° Décomposables en couples de points, cas sans intérêt qui correspond aux surfaces du second degré réglées, que nous laisserons de côté.

I. *Les coniques* (Γ) *du faisceau* (Φ) *sont tangentes à quatre droites distinctes.*

C'est le cas étudié dans la Note précédemment citée. La surface (Σ) est du quatrième degré, à trois lignes doubles, quatre coniques singulières (dans quatre plans tangents singuliers); ses lignes asymptotiques sont des quartiques unicursales.

II. *Les coniques* (Γ) *sont tangentes à deux droites* (D) *et* (D'), *et tangentes à une troisième droite* (Δ) *en un point fixe* M.

D et D′ se coupent en K. Nous prendrons comme côtés du triangle de référence auquel sont rapportées les coniques (Γ) : KM, sa conjuguée par rapport à (D) et (D′), et (Δ).

Les équations de (D), (D′) et (Δ) seront respectivement

$$(D) \qquad y + z = 0,$$
$$(D') \qquad y - z = 0,$$
$$(\Delta) \qquad x = 0.$$

L'équation tangentielle des coniques (Γ) est alors

$$2\lambda uw + (w^2 - v^2) = 0;$$

en coordonnées ponctuelles,

$$\lambda^2 y^2 - x^2 - 2\lambda zx = 0.$$

Les coniques du faisceau (F) étant harmoniquement circonscrites aux coniques (Γ) de (Φ), on forme aisément l'équation du faisceau (F) :

$$Ax^2 + B(y^2 - z^2) - 2Cxy + 2Dyz = 0.$$

On peut donc trouver un tétraèdre de référence tel que (Σ) ait pour équations

$$\left\{\begin{array}{l} X = x^2, \\ Y = y^2 + z^2, \\ Z = 2xy, \\ T = 2yz. \end{array}\right.$$

L'équation ponctuelle de (Σ) est alors

$$Z^4 - 4XYZ^2 + 4X^2T^2 = 0.$$

Elle est du quatrième degré, a un point triple ($X = Y = Z = 0$) par lequel passent deux lignes doubles ($Z = 0$, $T = 0$) et ($X = 0$, $Z = 0$). Le long

de cette dernière, la surface a deux nappes qui touchent le plan $X = 0$.

Les sections planes sont des quartiques unicursales ayant un point double sur $(Z = 0, T = 0)$ et deux branches tangentes au plan $X = 0$ sur $(X = 0, Z = 0)$. (Σ) possède deux plans tangents singuliers touchant la surface suivant des coniques doubles ayant pour images (D) et (D').

Les asymptotiques ayant pour images

$$\lambda^2 y^2 - 2\lambda zx + x^2 = 0,$$

on forme aisément les expressions des coordonnées d'un point en fonctions homogènes de x et y :

$$\begin{cases} X = \lambda^2 x^4, \\ Y = \lambda^2 x^2 y^2 + (\lambda^2 y^2 + x^2)^2, \\ Z = 2\lambda^2 x^3 y, \\ T = \lambda x y (\lambda^2 y^2 + x^2). \end{cases}$$

Ce sont des quartiques tangentes à la droite $(X = 0, Z = 0)$ au point triple de la surface et aux deux coniques singulières.

III. *Les coniques du faisceau* (Φ) *sont osculatrices en un point* (M) *et tangentes à une droite* (Δ).

Nous choisissons ainsi le triangle de référence auquel nous rapportons (Φ) : $x = 0$ est la tangente commune aux coniques en M, $Z = 0$ est la droite Δ, $y = 0$ est une droite passant par M et formant un triangle avec les deux droites précédentes.

L'équation tangentielle des coniques de (Φ) est

$$v^2 - 2uv + 2\lambda vw = 0,$$

d'où l'équation du faisceau contravariant (F) :

$$Ax^2 + B(y^2 + 2zx) + Cz^2 + 2Dxy = 0.$$

Les coordonnées d'un point de (Z) sont

$$\begin{cases} X = x^2, \\ Y = y^2 + 2zx, \\ Z = z^2, \\ T = 2xy, \end{cases}$$

et l'équation réduite de (Σ) est alors

$$(4XY - T^2)^2 - 64X^3Z = 0;$$

(Σ) est du quatrième degré, à une droite double ($X = 0$, $T = 0$) correspondant à $x = 0$, le long de laquelle la surface touche le plan $X = 0$.

Elle a un seul plan tangent singulier ($z = 0$) touchant (Σ) suivant la conique double :

$$(z = 0,\ 4XY - T^2 = 0).$$

Un plan passant par la droite double coupe la surface suivant une conique tangente à cette droite et tangente à $z = 0$ au point où son plan coupe la conique singulière.

Les sections planes sont des quartiques unicursales ayant un point singulier sur la droite double

$$(X = 0,\ T = 0).$$

Les lignes asymptotiques ont pour images les coniques

$$(\lambda x + y)^2 - 2xz = 0,$$

d'où les expressions des coordonnées d'un point se déduisent aisément :

$$\begin{cases} X = x^2, \\ Y = y^2 + (\lambda x + y)^2, \\ Z = \dfrac{(\lambda x + y)^4}{4x^2}, \\ T = 2xy. \end{cases}$$

Ce sont des courbes du quatrième degré unicursales, tangentes à la conique singulière et présentant un point singulier sur $X = 0$, $T = 0$.

IV. *Les coniques du faisceau* (Φ) *sont bitangentes.*

Elles sont tangentes aux deux droites $x = 0$, $y = 0$ à leurs points d'intersection avec $z = 0$. L'équation générale des coniques (Γ) est

$$uv - \mu w^2 = 0$$

ou, en coordonnées ponctuelles,

$$xy = \lambda z^2.$$

L'équation du faisceau (F) se forme aisément; on trouve

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxz + 2Dyz = 0,$$

ce qui conduit à poser

$$\begin{cases} X = x^2, \\ Y = y^2, \\ Z = 2xz, \\ T = 2yz, \end{cases}$$

X, Y, Z, T étant les coordonnées d'un point variable de (Σ) par rapport à un certain tétraèdre de référence. L'équation réduite de (Σ) est

$$YZ^2 - XT^2 = 0;$$

(Σ) est une surface réglée du troisième degré admettant comme directrice rectiligne double la droite ($Z = 0$, $T = 0$) et comme directrice simple la droite ($X = 0$, $Y = 0$).

Inversement, il est aisé de montrer que toute surface du troisième degré réglée, ayant ses deux directrices

distinctes, a une équation de cette forme et est une surface de Steiner.

Les génératrices rectilignes de (Σ) ont pour images des droites passant par le point $(x=0, y=0)$.

Les lignes asymptotiques de (Σ) se composent de ces génératrices et des courbes ayant pour images les coniques

$$xy - \lambda z^2 = 0.$$

Ce sont des quartiques :

$$\left\{\begin{aligned} X &= x^4, \\ Y &= \lambda^2 z^4, \\ Z &= 2x^3 z, \\ T &= 2\lambda z^3 x. \end{aligned}\right.$$

Elles passent par les deux points $(X=0, Z=0, T=0)$ et $(Y=0, Z=0, T=0)$ de la directrice double et sont tangentes en ces points respectivement aux génératrices $(X=0, Z=0)$ et $(Y=0, T=0)$ de (Σ). Ce sont les courbes d'intersection de (Σ) et des quadriques

$$XY - \frac{\lambda^2}{4} ZT = 0,$$

l'intersection complète se composant en réalité d'une asymptotique et des droites $(X=0, Z=0)$ et $(Y=0, T=0)$.

V. *Les coniques du faisceau* (Φ) *sont surosculatrices en un point.*

Soit $(x=0, y=0)$ le point de surosculation et $x=0$ la tangente en ce point; l'équation tangentielle de (Φ) est

$$v^2 - \mu w^2 - uw = 0$$

ou, en coordonnées ponctuelles,

$$y^2 - 4xz + \lambda x^2 = 0.$$

Le faisceau (F) a pour équation

$$Ax^2 + B(y^2 - 2zx) + 2Cyz + 2Dxy = 0.$$

Posons

$$\begin{cases} X = x^2, \\ X = y^2 + 2zx, \\ Z = 2yz, \\ T = 2xy. \end{cases}$$

X, Y, Z, T sont les coordonnées d'un point de (Σ) par rapport à un certain tétraèdre de référence. (Σ) a pour équation ponctuelle réduite

$$T^3 - 4X(YT - 2XZ) = 0.$$

Elle a une seule ligne double $(X = 0,\ T = 0)$ et est réglée.

C'est une surface réglée du troisième ordre où les deux directrices sont confondues (surface de Cayley). Et, inversement, on prouve facilement que toute surface de Cayley peut être ramenée à cette forme type e est une surface de Steiner.

Les sections planes sont des cubiques ayant un point double sur la ligne double.

Les génératrices rectilignes correspondent aux droites passant par le point $(x = y = 0)$.

Les asymptotiques sont les génératrices rectilignes et les courbes ayant pour images les coniques de (Φ) :

$$y^2 - 4xz + \lambda x^2 = 0.$$

Exprimons les coordonnées d'un point par des fonctions homogènes de deux paramètres; nous avons

$$\begin{cases} X = 2x^3, \\ Y = 3xy^2 + \lambda x^3, \\ Z = y(\lambda x^2 + y^2), \\ T = 4x^2 y. \end{cases}$$

Ce sont des cubiques gauches tangentes au point $(X = Y = Z = 0)$ à la directrice double $(X = 0, T = 0)$ de la surface (Σ).

VI. *Autres cas possibles pour les coniques* (Φ).

On voit que f_1, f_2, f_3, f_4 sont linéaires séparément par rapport aux variables x, y et z prises séparément et que les coniques de (F) passent par deux points fixes. Les surfaces (Σ) sont des quadriques réglées.

Remarque I. — Dans les cas IV et V seulement, les coniques de (F) passent par un seul point fixe. C'est la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface définie par les équations (1) soit du troisième degré et réglée. Il est aisé de traduire ce résultat analytiquement.

Cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que, la condition précédente étant remplie, la surface cubique ait ses deux directrices confondues.

On sait que les coniques (Φ) sont surosculatrices, condition nécessaire et suffisante. La propriété géométrique correspondante pour le faisceau (F) contravariant de (Φ) est la suivante : les coniques de (F) réduites à une droite double sont telles que cette droite passe par le point de surosculation, et inversement toute droite passant par ce point est conique double de (F). Cette propriété est caractéristique, comme il est facile de le voir géométriquement ou sur les diverses équations trouvées pour (F). Traduisons ceci analytiquement :

Exprimons d'abord que (Σ) est du troisième degré; les coniques $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, $f_4 = 0$ passent par un point fixe; par une transformation homographique convenable effectuée sur x, y et z, on fait dis-

paraître les termes en z^2 dans f_1, f_2, f_3, f_4. Le point de surosculation est alors $x=y=0$. Et il nous reste à exprimer que $(\alpha x+\beta y)^2$ est une conique du faisceau (F), quels que soient α et β.

On a

$$f_i = a_i x^2 + b_i y^2 + 2c_i yz + 2d_i zx + 2e_i xy \quad (i=1, 2, 3, 4).$$

L'équation de (F) est

$$\mathrm{A} f_1 + \mathrm{B} f_2 + \mathrm{C} f_3 + \mathrm{D} f_4 = 0.$$

Identifions ceci avec

$$(\alpha x+\beta y)^2.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}a_1 + \mathrm{B}a_2 + \mathrm{C}a_3 + \mathrm{D}a_4 - \alpha^2 &= 0,\\
\mathrm{A}b_1 + \mathrm{B}b_2 + \mathrm{C}b_3 + \mathrm{D}b_4 - \beta^2 &= 0,\\
\mathrm{A}c_1 + \mathrm{B}c_2 + \mathrm{C}c_3 + \mathrm{D}c_4 - \alpha\beta &= 0,\\
\mathrm{A}d_1 + \mathrm{B}d_2 + \mathrm{C}d_3 + \mathrm{D}d_4 &= 0,\\
\mathrm{A}e_1 + \mathrm{B}e_2 + \mathrm{C}e_3 + \mathrm{D}e_4 &= 0,
\end{aligned}$$

ce qui exige que l'on ait

$$\begin{vmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \alpha^2\\
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \beta^2\\
c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \alpha\beta\\
d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & 0\\
e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & 0
\end{vmatrix} = 0,$$

équation du second degré en $\frac{\beta}{\alpha}$ devant avoir une racine double. D'où la condition cherchée :

$$\left[\begin{vmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\
b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\
d_1 & d_2 & d_3 & d_4\\
e_1 & e_2 & e_3 & e_4
\end{vmatrix}\right]^2 - 4\begin{vmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\
c_1 & c_2 & c_3 & c_4\\
d_1 & d_2 & d_3 & d_4\\
e_1 & e_2 & e_3 & e_4
\end{vmatrix}\begin{vmatrix}
b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\
c_1 & c_2 & c_3 & c_4\\
d_1 & d_2 & d_3 & d_4\\
e_1 & e_2 & e_3 & e_4
\end{vmatrix} = 0.$$

Remarque II. — Nous ferons encore remarquer que, pour les surfaces du troisième degré réglées, le degré

de leurs asymptotiques est caractéristique de leur nature; ce degré est égal à 4 pour les surfaces à directrices distinctes et à 3 pour les surfaces de Cayley.

[R4a]

SUR L'ÉQUILIBRE DU CORPS SOLIDE;

Par M. Georges LERY.

Je me propose d'obtenir les conditions nécessaires et suffisantes d'équilibre d'un corps solide, en supprimant tous les théorèmes inutiles. Les hypothèses mécaniques indispensables se mettent d'elles-mêmes en évidence.

Les démonstrations faites au moyen de la Géométrie analytique sont aussi simples, bien qu'un peu plus longues à dire, par la Géométrie.

1. *Géométrie.* — On définira le moment d'un vecteur, ses coordonnées, la somme géométrique et le moment résultant d'un système de vecteurs.

On résoudra le problème suivant : *Construire un vecteur connaissant ses moments par rapport à deux points* A *et* B. Il y a une condition de possibilité, c'est que les deux moments aient des projections équipollentes sur la droite AB, et alors il y a une solution unique.

En effet, je puis prendre le point A comme origine : soient x, y, z les coordonnées de B; X, Y, Z les projections du vecteur cherché; L, M, N et L′, M′, N′ les composantes de ses moments par rapport à A et B. Les

équations du problème,

$$\begin{aligned} L' &= L - (yZ - zY), \\ M' &= M - (zX - xZ), \\ N' &= N - (xY - yX), \\ 0 &= LX + MY + NZ, \end{aligned}$$

donnent une solution en X, Y, Z si l'on a

$$Lx + My + Nz = L'x + M'y + N'z = 0.$$

2. *Cinématique.* — Après avoir étudié la vitesse et l'accélération d'un point, on démontrera les deux propriétés suivantes :

Théorème I. — *Pour que deux points restent à une distance invariable, il faut et suffit qu'à chaque instant les projections de leurs vitesses sur la droite qui les joint soient équipollentes.*

Car l'égalité

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = \text{const.}$$

entraîne

$$(x - x')\frac{dx}{dt} + (y - y')\frac{dy}{dt} + (z - z')\frac{dz}{dt}$$
$$= (x - x')\frac{dx'}{dt} + (y - y')\frac{dy'}{dt} + (z - z')\frac{dz'}{dt},$$

et inversement.

Théorème II. — *Dans le mouvement d'un solide, il existe à chaque instant deux vecteurs* H *et* K *ayant pour origine un point arbitrairement choisi* A *et tels que la vitesse d'un point quelconque* M *du corps soit donnée par l'égalité géométrique*

(1) $$V_M = H + \mathfrak{M}_M K.$$

En effet : 1° si les vitesses de plusieurs points M_1,

M_2, ... sont données par la formule (1), leurs distances mutuelles ne varient pas (théorème I).

2° Comme la position d'un solide est définie par celle de trois de ses points, il suffit de montrer qu'on peut déterminer H et K connaissant les vitesses de trois points A, B et C. On a

$$V_A = H,$$
$$V_B = H + \mathfrak{M}_B K,$$
$$V_C = H + \mathfrak{M}_C K.$$

La première égalité définit H; les autres s'écrivent

$$\mathfrak{M}_B K = V_B - V_A,$$
$$\mathfrak{M}_C K = V_C - V_A:$$

elles déterminent K, comme on l'a vu, car la condition de possibilité du problème est remplie.

Le théorème est exprimé en Géométrie analytique par les équations

$$V_x = \xi + qz - ry,$$
$$V_y = \eta + rx - pz,$$
$$V_z = \zeta + py - qx.$$

ξ, η, ζ étant les composantes de H, et p, q, r celles de $-$ K.

3. *Dynamique*. — On définit la masse d'un corps au moyen de la balance. Soit un point matériel en mouvement, de masse m, ayant à un certain moment l'accélération J. On dit que ce point est soumis à la force

$$F = mJ.$$

On justifie sans peine ces deux définitions par des faits d'expérience courante. L'étude des forces et des circonstances extérieures avec lesquelles elles sont en relation est en général du domaine de la Physique; elle

donne lieu à un nombre considérable d'hypothèses. On n'étudie en Mécanique que les cas les plus simples.

Le postulat suivant est fondamental :

Principe de Galilée. — *Si un point matériel est soumis à un ensemble de circonstances extérieures qui, séparément, produiraient des forces* $F_1, F_2, \ldots,$ *tout se passe comme s'il était soumis à une force unique* R, *égale à la somme géométrique des précédentes.*

On en déduit les équations du mouvement d'un point

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum X,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum Y,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum Z,$$

et l'équation des forces vives,

$$d\frac{1}{2}mv^2 = \sum (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

La quantité entre parenthèses s'appelle *travail élémentaire* de la force X, Y, Z.

Conditions d'équilibre du point matériel. — Pour que le point reste en repos, il faut qu'on ait

$$\sum X = \sum Y = \sum Z = 0.$$

Si ces conditions sont remplies, le point a un mouvement uniforme. Il reste en repos si sa vitesse initiale est nulle.

4. *Corps solide.* — On le regarde comme constitué de points matériels maintenus à des distances inva-

riables par les forces intérieures. On admet que ces dernières sont deux à deux égales et directement opposées (*principe de Newton*) et, par suite, qu'elles forment un système dont les six coordonnées sont nulles.

On en déduit sans peine les six équations du mouvement, qui ne contiennent que les forces extérieures.

$$\sum m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum X, \qquad \cdots\cdot$$

$$\frac{d}{dt} \sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = \sum L, \qquad \cdots\cdot$$

et l'équation des forces vives,

$$d \sum \frac{1}{2} m v^2 = \sum (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Théorème III. — *Le travail élémentaire d'un système de forces appliquées à un solide ne dépend que des coordonnées du système, et non de chaque force en particulier.*

En effet, en appliquant le théorème II, on obtient

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = (\xi X + \eta Y + \zeta Z + p L + q M + r N)\,dt.$$

Le théorème peut être inexact si les points d'application sont mobiles dans le corps, car le théorème II ne s'applique plus.

Théorème IV. — *Pour qu'un corps soit en équilibre, il faut et il suffit que le système des forces extérieures ait ses six coordonnées nulles.*

1° Les conditions sont nécessaires, d'après les équations du mouvement.

2° Elles sont suffisantes, car le théorème des forces vives donne alors

$$\sum m (v^2 - v_0^2) = 0,$$

et, si v_0 est nulle pour chaque point,

$$\sum mv^2 = 0;$$

donc la vitesse v de chaque point est nulle.

5. On voit qu'il y a seulement deux principes à admettre : celui de Galilée et celui de Newton. Il est inutile de supposer qu'on peut transporter une force en un point quelconque de sa direction, qu'on peut introduire ou supprimer deux forces égales et directement opposées, qu'un corps n'est en équilibre sous l'action de deux forces que si elles sont égales et directement opposées.

On a en outre l'avantage, par cette méthode, de donner aux élèves, d'une façon simple, deux notions importantes : celle de la vitesse des points d'un solide en mouvement, et celle du travail des forces appliquées en des points bien déterminés du solide.

[O5iα]

NOTE SUR LES SURFACES A LIGNES DE COURBURE PLANES ;

Par M. J. HAAG,

Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Douai.

Soient (S) une courbe gauche et u l'arc de cette courbe, compté à partir d'une certaine origine. Attachons à cette courbe un trièdre (T) dont l'origine sera en un point quelconque de (S); l'axe des x sera la tangente, My sera la normale principale et Mz la binormale. On sait qu'on a alors le système de translations et de rota-

tion suivant :

$$\xi = 1, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0, \quad p = -\frac{1}{\tau}, \quad q = 0, \quad r = \frac{1}{\rho},$$

ρ et τ étant les rayons de courbure et de torsion, et la variable u jouant le rôle du temps.

Ceci étant, imaginons que dans le plan Mxy on trace une courbe (C) dont les équations paramétriques soient

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = 0.$$

Quand u varie, cette courbe engendre une certaine surface (Σ).

Cherchons d'abord la condition pour que sur cette surface les courbes $v =$ const. soient les trajectoires orthogonales des courbes (C). Quand u seul varie, les déplacements élémentaires d'un point P quelconque de (C) sont

$$\mathrm{D}x = \left(\frac{\partial x}{\partial u} - ry\right) du, \quad \mathrm{D}y = \left(\frac{\partial y}{\partial u} + rx\right) du, \quad \mathrm{D}z = py\, du.$$

La condition d'orthogonalité cherchée est donc

$$(1) \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial u} - ry\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \left(\frac{\partial y}{\partial u} + rx\right)\frac{\partial y}{\partial v} = 0.$$

On remarque que cette équation ne renferme que r. Or, *quelle relation y a-t-il entre différentes courbes gauches pour lesquelles le rayon de courbure a même expression en fonction de l'arc de la courbe?* Si nous considérons la développable (D) dont (S) est l'arête de rebroussement, on voit immédiatement que l'élément linéaire de cette développable est

$$ds^2 = dx^2 + r^2 x^2\, du^2.$$

Il ne dépend que de r.

On déduit de ces remarques le théorème suivant :

Théorème. — *Considérons une famille quelconque*

de sections planes (C) *d'une surface quelconque* (Σ), *et soient* (C') *leurs trajectoires orthogonales sur cette surface. Les plans des courbes* (C) *ont une certaine enveloppe* (D). *Déformons cette enveloppe sans déchirure ni duplicature, de telle façon que ses génératrices rectilignes demeurent des droites. Si chaque plan tangent entraîne avec lui la courbe* (C) *correspondante, on obtiendra une nouvelle surface* (Σ_1). *Les points des différentes courbes* (C) *qui étaient primitivement sur une même trajectoire orthogonale* (C') *demeurent encore, après la déformation, sur une même trajectoire orthogonale* (C'_1) *des courbes* (C_1).

Ce théorème présente une grande analogie avec un théorème démontré par Ribaucour sur les congruences de courbes planes (¹).

Supposons maintenant que les courbes (C) soient lignes de courbure sur (Σ). Pour qu'il en soit ainsi, il faut et suffit que l'angle θ que fait la tangente à (C') avec le plan Mxy soit une fonction de u. Or, si l'on pose

$$A^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} - ry\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} + rx\right)^2 + p^2y^2,$$

on a

$$\sin\theta = \frac{py}{A},$$

d'où

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u} - ry\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} + rx\right)^2 = \cot^2\theta\, p^2 y^2$$

ou

$$(2) \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial u} - ry\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} + rx\right)^2 = U^2 y^2,$$

(¹) Ribaucour, *Sur la déformation des surfaces* (*Comptes rendus*, t. LXX, 1870, p. 330).

en posant

(3) $$U = p \cot \theta.$$

Pour avoir la surface à lignes de courbure planes la plus générale, il faut donc résoudre le système (1), (2) par rapport à x et y. Ayant résolu ce système, on en déduira des courbes (C) que l'on placera dans les différents plans osculateurs de la courbe gauche (S) la plus générale dont la courbure évaluée en fonction de l'arc est égale à r. Ces courbes seront lignes de courbure d'une surface qui coupera leurs plans respectifs sous un angle θ tel que l'on ait

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{p}{U},$$

p désignant la torsion de (S) changée de signe.

On pourra en particulier supposer que la fonction p, qui peut être prise arbitrairement, soit égale à Ui. On aura alors

$$\operatorname{tang} \theta = i,$$

d'où

$$A^2 = 0.$$

Par suite, les tangentes à (C') seront des droites isotropes. On en déduit immédiatement que, si les courbes (C) ne sont pas des droites isotropes, la surface (Σ) devient alors une développable circonscrite au cercle imaginaire de l'infini.

On déduit de tout ce qui précède le théorème suivant :

Théorème. — *Soient* (Δ) *une développable isotrope et* (D) *une autre développable quelconque. Déformons* (D) *de façon que ses génératrices demeurent rectilignes et supposons que ses plans tangents entraînent avec eux les courbes suivant lesquelles*

ils coupaient (Δ). *Après la déformation la plus générale, ces courbes planes constituent des lignes de courbure de la surface sur laquelle elles se trouvaient. De plus, toute surface à lignes de courbure planes peut être obtenue de cette façon.*

Ce théorème est d'ailleurs fort connu (*voir* Darboux, *Théorie des surfaces,* t. IV, p. 206).

Étudions maintenant le système (1), (2). On en déduit tout d'abord que la surface à lignes de courbure planes la plus générale dépend de quatre fonctions arbitraires d'une variable, à condition toutefois de choisir convenablement la variable v. Nous ne nous occuperons pas de l'intégration de ce système. Nous allons simplement lui faire subir quelques transformations qui nous conduiront à un résultat intéressant.

On satisfait aux équations (1) et (2) en posant

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = ry + \mathrm{U}y\cos\varphi, \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} = -rx + \mathrm{U}y\sin\varphi, \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\lambda\sin\varphi, \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial v} = \lambda\cos\varphi. \end{cases}$$

les fonctions λ et φ étant des fonctions inconnues de u et de v. Ces fonctions ont d'ailleurs une signification géométrique simple. D'abord φ désigne l'angle de Mx avec la normale en P à (C). Puis, si l'on appelle σ l'arc de la courbe (C), on a

$$\lambda = \frac{\partial\sigma}{\partial v},$$

de sorte que le rayon de coubure (C) est égal à $\dfrac{\lambda}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}\cdot$ Éga-

lons maintenant les deux valeurs de $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$, ainsi que celles de $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$, que l'on peut déduire de (4) et (5). On a

$$(r + \text{U} \cos\varphi)\lambda \cos\varphi - \text{U}y \sin\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\lambda \cos\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{\partial\lambda}{\partial u} \sin\varphi,$$

$$r\lambda \sin\varphi + \text{U} \sin\varphi\lambda \cos\varphi + \text{U}y \cos\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial v}$$
$$= -\lambda \sin\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\lambda}{\partial u} \cos\varphi,$$

d'où l'on déduit aisément

(6) $$r + \text{U} \cos\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial u} = 0,$$

$$\text{U}y \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{\partial\lambda}{\partial u}.$$

Si l'on voulait achever l'intégration du système (1), (2), il faudrait tirer y de cette dernière équation et porter dans (3) et (4). Mais on est conduit à des calculs qui semblent compliqués. Occupons-nous seulement de l'équation (6), qui nous donne l'angle φ. Si l'on pose $\text{tang}\frac{\varphi}{2} = t$, elle devient une équation de Riccati en t. Si nous convenons alors d'appeler *rapport anharmonique* de quatre tangentes à une courbe plane quelconque le rapport anharmonique de quatre tangentes parallèles menées à un cercle du plan de cette courbe, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Considérons, sur une surface à lignes de courbure planes, quatre lignes de seconde courbure quelconques. Ces quatre lignes rencontrent chaque ligne de première courbure en quatre points dont les tangentes ont un rapport anharmonique constant.*

Si l'on suppose en particulier une surface à lignes de courbure circulaires, on retrouve un théorème dû à M. Picard (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. VI, 1877, p. 362).

Plus particulièrement encore, on en déduit que :

Étant donnée une famille quelconque de cercles sur une sphère, quatre de leurs trajectoires orthogonales coupent tous les cercles de la famille en quatre points de même rapport anharmonique.

D'où l'on déduit par inversion le même théorème pour une famille plane de cercles (Darboux, *Théorie des surfaces*, t. I, p. 116). Si l'on combine cette dernière propriété avec le premier théorème de cette Note, on obtient immédiatement une proposition due à M. Demartres [1] :

Théorème. — *Étant donnée une surface quelconque possédant une famille de cercles, quatre trajectoires orthogonales quelconques coupent chaque cercle en quatre points de rapport anharmonique constant.*

Nous terminerons en faisant remarquer que, d'après ce qui précède, *la détermination des lignes de seconde courbure d'une surface à lignes de courbure planes se ramène à l'intégration d'une équation de Riccati*. Nous savons même quelles variables il faudra choisir pour tomber sur cette équation. Enfin, il résulte de là que, si l'on connaît une, deux ou trois lignes de seconde courbure, les autres se détermineront par deux, une ou zéro quadratures.

---

[1] *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. II, 1885.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1908. COMPOSITION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE.

Solution par M. PHILBERT DU PLESSIS.

On considère un plan P *et un système* (S) *de forces appliquées à un solide invariable : ce système, par hypothèse, n'est équivalent ni à une force unique, ni à un couple, ni à zéro.*

I. *Démontrer sans calcul que le système* (S) *peut être en général remplacé par deux forces, l'une* F_1 *normale au plan* P, *l'autre* F_2 *située dans ce plan.*

Indiquer les conditions de possibilité du problème.

II. *Soient* Ox, Oy, Oz *trois axes de coordonnées rectangulaires;* X, Y, Z, L, M, N *les six coordonnées du système* (S), *c'est-à-dire les projections sur les axes de la résultante générale et du moment résultant relatif au point* O.

Soit enfin

$$ux + vy + wz + h = 0$$

l'équation du plan P.

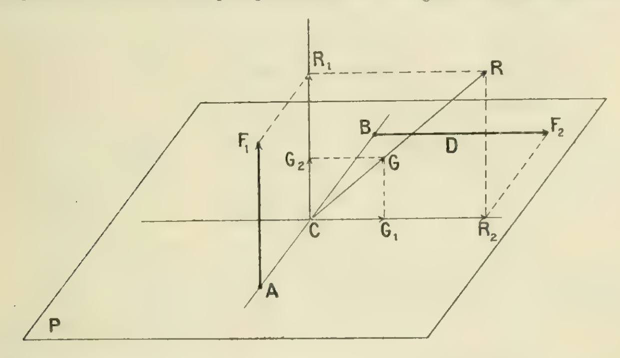
On demande de calculer les coordonnées x_1, y_1, z_1 *du point de rencontre* A *de la force* F_1 *avec le plan* P, *ainsi que l'équation du plan* Π *mené perpendiculairement au plan* P *par la droite* D *qui porte* F_2.

III. *On assujettit le plan* P *à passer par une droite fixe donnée* Δ.

Trouver le lieu géométrique [C] *du point* A, *et le lieu géométrique* [Σ] *de la droite* D, *quand le plan* P *pivote autour de la droite donnée* Δ.

IV. *Former l'équation réduite de la surface [Σ] et discuter la nature de cette surface suivant les positions diverses de la droite donnée Δ.*

I. Les forces F_1 et F_2 cherchées étant équipollentes respectivement aux projections orthogonales de la résul-



tante générale sur la normale au plan P et sur ce plan, il est nécessaire, pour qu'aucune d'elles ne soit nulle, que la direction de cette résultante générale, et par suite l'axe central du système, ne soit ni perpendiculaire ni parallèle au plan P.

Cette condition étant supposée remplie, l'axe central rencontrera le plan P en un point C où l'on pourra faire la réduction. Soient, dès lors, R et G la résultante générale et le moment résultant portés sur cet axe central. Projetons orthogonalement ces deux vecteurs en R_1 et G_2 sur la normale en C au plan P, en R_2 et G_1 sur ce plan, puis transportons les vecteurs R_1 et R_2 parallèlement à eux-mêmes en F_1 et F_2, leurs points d'application étant amenés sur la perpendiculaire en C au plan RCG_1 (perpendiculaire contenue dans le plan P), en A et en B, de façon que les moments de F_1 et de F_2 par rapport au point C soient respectivement G_1 et G_2, c'est-à-dire que

$$F_1 = CA . G_1, \qquad F_2 = CB . G_2,$$

le sens de CA ou de CB étant tel que, pour l'observateur CG_1 ou CG_2, le sens de F_1 ou de F_2 soit de gauche à droite.

Remarquons que le moment résultant du système par rapport au point A, se réduisant à celui de F_2, est normal au point P, et le moment résultant par rapport à un point quelconque de la droite BF_2 ou D, se réduisant à celui de F_1, est situé dans ce plan.

II. Les composantes du moment résultant en (x, y, z) étant

$$L - yZ + zY, \qquad M - zX + xZ, \qquad N - xY + yX,$$

on exprime l'orthogonalité de ce moment pris en (x_1, y_1, z_1) et du plan P par les équations

$$(1) \qquad \frac{L - y_1 Z + z_1 Y}{u} = \frac{M - z_1 X + x_1 Z}{v} = \frac{N - x_1 Y + y_1 X}{w},$$

auxquelles il faut joindre

$$(2) \qquad ux_1 + vy_1 + wz_1 + h = 0,$$

puisque le point A est dans le plan P.

La dernière équation (1) peut s'écrire

$$-(vy_1 + wz_1)X + x_1(vY + wZ) + Mw - Nv = 0.$$

En l'ajoutant à l'équation (2) multipliée par X, on a

$$x_1(uX + vY + wZ) + Mw - Nv + hX = 0,$$

d'où

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{Nv - Mw - hX}{uX + vY + wZ}, \\ \text{et, par permutation circulaire,} \\ y_1 = \dfrac{Lw - Nu - hY}{uX + vY + wZ}, \\ z_1 = \dfrac{Mu - Lv - hZ}{uX + vY + wZ}. \end{array} \right.$$

De même, puisqu'en tout point de D le moment résultant est situé dans P, cette droite appartient au lieu des points où ce moment est parallèle à P, dont l'équation est

$$u(L - yZ + zY) + v(M - zX + xZ) + w(N - xY + yX) = 0$$

ou

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & x(vZ - wY) + y(wX - uZ) \\ & \qquad + z(uY - vX) + Lu + Mv + Nw = 0. \end{aligned} \right.$$

Or, on vérifie immédiatement que ce plan est perpendiculaire au plan P, attendu qu'on a identiquement

$$u(vZ - wY) + v(wX - uZ) + w(uY - vX) \equiv 0.$$

Le plan représenté par (4) n'est donc autre que le plan Π de l'énoncé.

III. Si le plan P passe par une droite fixe, on a

$$u = u_1 + \lambda u_2, \qquad v = v_1 + \lambda v_2,$$
$$w = w_1 + \lambda w_2, \qquad h = h_1 + \lambda h_2,$$

λ étant un paramètre arbitraire, et, comme tous les coefficients de (4) sont linéaires en u, v, w, le plan Π passe également par une droite fixe. Si nous posons

$$\begin{aligned} Nv - Mw - hX &= a, \\ Lw - Nu - hY &= b, \\ Mu - Lv - hZ &= c, \\ uX + vY + wZ &= d, \end{aligned}$$

et si nous représentons par a_i, b_i, c_i, d_i ce que deviennent ces quantités quand on y remplace les u, v, w, h par u_i, v_i, w_i, h_i, nous voyons que les coordonnées du point A sont données par

$$\frac{x}{a_1 + \lambda a_2} = \frac{y}{b_1 + \lambda b_2} = \frac{z}{c_1 + \lambda c_2} = \frac{1}{d_1 + \lambda d_2},$$

d'où

$$(5)\qquad \frac{d_2 x - a_2}{a_1 d_2 - a_2 d_1} = \frac{d_2 y - b_2}{b_1 d_2 - b_2 d_1} = \frac{d_2 z - c_2}{c_1 d_2 - c_2 d_1},$$

équations d'une droite qui est le lieu [C] du point A.

De même si, représentant par

$$\mathrm{P} = 0 \qquad \text{et} \qquad \Pi = 0$$

les équations des plans P et Π, nous désignons par P_i et Π_i ce que deviennent leurs premiers membres par la même substitution que ci-dessus, nous voyons que, ces équations s'écrivant

$$\mathrm{P}_1 + \lambda \mathrm{P}_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \Pi_1 + \lambda \Pi_2 = 0,$$

le lieu [Σ] de leur droite D d'intersection est donné par

$$(6)\qquad \mathrm{P}_1 \Pi_2 - \mathrm{P}_2 \Pi_1 = 0,$$

quadrique réglée dont nous allons discuter la nature, et qui contient d'une part la droite Δ, de l'autre la droite $\Delta'(\Pi_1 = 0,\ \Pi_2 = 0)$ autour de laquelle pivote le plan Π.

IV. Pour opérer la réduction de l'équation (6), faisons un choix particulier d'axes. Prenons comme axe des z l'axe central du système (S), ce qui revient à faire

$$\mathrm{X} = 0, \qquad \mathrm{Y} = 0, \qquad \mathrm{Z} = \mathrm{R},$$
$$\mathrm{L} = 0, \qquad \mathrm{M} = 0, \qquad \mathrm{N} = \mathrm{G},$$

et comme axe des x la perpendiculaire commune à cet axe et à la droite Δ dont les équations seront dès lors

$$x = x_0, \qquad y = tz,$$

la signification de t étant fournie par

$$t = \operatorname{tang} \omega.$$

si ω est l'angle de Δ avec la direction de Oz. Cela revient à prendre

$$u_1 = 1, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = 0, \quad h_1 = -x_0,$$
$$u_2 = 0, \quad v_2 = 1, \quad w_2 = -t, \quad h_2 = 0,$$

d'où se déduisent

$$a_1 = 0, \quad b_1 = -G, \quad c_1 = Rx_0, \quad d_1 = 0,$$
$$a_2 = G, \quad b_2 = 0, \quad c_2 = 0, \quad d_2 = -Rt.$$

Les équations (5) deviennent alors

$$(5') \qquad \begin{cases} Rtx + G = 0, \\ Rx_0y + Gz = 0, \end{cases}$$

et l'équation (6)

$$(6') \quad R(x^2+y^2) - Rtyz - (Rx_0 + Gt)x + Gtx_0 = 0.$$

Dans le cas où l'angle ω est droit (Δ orthogonale à l'axe central) et, par suite, t infini, cette équation se réduit à

$$(6'') \qquad Ryz + G(x - x_0) = 0.$$

Lorsque t n'est pas infini, l'équation en s de l'équation (6'), préalablement divisée par R, est

$$\begin{vmatrix} 1-s & 0 & 0 \\ 0 & 1-s & -\frac{t}{2} \\ 0 & -\frac{t}{2} & -s \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(1-s)\left(s^2 - s - \frac{t^2}{4}\right) = 0,$$

dont les racines sont

$$s_1 = 1, \quad s_2 = \frac{1+\sqrt{1+t^2}}{2}, \quad s_3 = \frac{1-\sqrt{1+t^2}}{2}.$$

On a, d'autre part [avec les notations habituelles (¹)].

$$\frac{H}{\Delta} = -\frac{(Rx_0 - Gt)^2}{4R^2}.$$

Par suite, la forme réduite correspondant à (6′) est

$$(7') \quad x'^2 + \frac{\sqrt{1+t^2}+1}{2} y'^2 - \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{2} z'^2 - \frac{(Rx_0 - Gt)^2}{4R^2} = 0,$$

ou, si l'on se reporte à l'expression ci-dessus de t,

$$(7' bis) \quad x'^2 \cos\omega + y'^2 \cos^2\frac{\omega}{2}$$
$$- z'^2 \sin^2\frac{\omega}{2} - \frac{(Rx_0\cos\omega - G\sin\omega)^2}{4R^2\cos\omega} = 0,$$

équation qui représente un *hyperboloïde à une nappe*, à moins que $\omega = 0$, ou que

$$\text{tang} = \frac{Rx_0}{G},$$

auxquels cas l'hyperboloïde se réduit respectivement à un *cylindre de révolution* ou à un *cône*.

La dernière condition exprime d'ailleurs que la droite Δ', dont les équations $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$ sont ici

$$y = 0,$$
$$Rx - Gt = 0,$$

rencontre la droite Δ définie par les équations (5′).

Pour l'équation (6″), également divisée par R, l'équation en s est

$$\begin{vmatrix} -s & 0 & 0 \\ 0 & -s & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -s \end{vmatrix} = 0$$

(¹) NIEWENGLOWSKI, *Cours de Géométrie analytique*, t. III, p. 271.

ou

$$s\left(s^2 - \frac{1}{4}\right) = 0,$$

dont les racines sont

$$s_1 = 0, \qquad s_2 = \frac{1}{2}, \qquad s_3 = -\frac{1}{2}.$$

On a d'ailleurs ici (¹)

$$\frac{H}{P} = -\frac{G^2}{4R^2},$$

d'où la forme réduite

$$(7'') \qquad y'^2 - z'^2 - \frac{2G}{R}x' = 0,$$

représentative d'un *paraboloïde hyperbolique équilatère*.

REMARQUES GÉOMÉTRIQUES.

Si l'on a recours à la notion du complexe de Chasles (complexe linéaire des axes de moment nul du système) on peut remarquer que, puisque le moment résultant en A est normal au plan P, ce point A est le foyer du plan P. Par suite, lorsque ce plan varie en passant par une droite fixe Δ, le point A décrit la droite conjuguée de Δ. Tel est donc le lieu [C].

Toutes les droites du complexe qui passent par le point I, à l'infini sur le support de F_1, rencontrent le support D de F_2. Autrement dit, le plan polaire de I est le plan Π mené par D perpendiculairement au plan P. Or, lorsque le plan P pivote autour de Δ, le point I décrit la droite à l'infini [I] des plans perpendiculaires à Δ. Son plan polaire Π passe, par suite, constamment par la droite Δ' conjuguée de [I].

(¹) Niewenglowski, *Cours de Géométrie analytique*, t. III, p. 271.

La droite D apparaît donc comme l'intersection de deux plans P et Π rectangulaires, passant chacun par une droite fixe, Δ pour l'un, Δ' pour l'autre. Le lieu [Σ] de cette droite est donc l'hyperboloïde de Chasles défini par ces deux droites. Cet hyperboloïde se réduit à un cylindre de révolution si elles sont parallèles et à un cône si elles se rencontrent. Elles ne peuvent d'ailleurs être parallèles que si Δ est parallèle à l'axe du complexe, avec lequel Δ' vient alors coïncider.

Si Δ est orthogonale à l'axe, Δ' est la droite à l'infini du plan mené par cet axe perpendiculairement à Δ, et l'hyperboloïde de Chasles devient un paraboloïde hyperbolique, d'ailleurs équilatère puisque sa génératrice Δ est perpendiculaire au plan directeur contenant Δ'.

NOTE ADDITIONNELLE.

Il n'est pas sans intérêt de montrer comment se pouvait résoudre la Partie II si l'on ne songeait pas à utiliser les remarques énoncées à la fin de la solution de la Partie I ci-dessus, relativement à la direction du moment résultant soit en A, soit en un point courant de D.

Si donc, (x_1, y_1, z_1) étant le point A, (x_2, y_2, z_2) un point courant de D, on représente par X_1, Y_1, Z_1 et X_2, Y_2, Z_2 les composantes des forces F_1 et F_2, on a immédiatement

$$ux_1 + vy_1 + wz_1 + h = 0, \tag{1}$$

$$ux_2 + vy_2 + wz_2 + h = 0, \tag{2}$$

$$\left\{\begin{aligned} X &= X_1 + X_2,\\ Y &= Y_1 + Y_2,\\ Z &= Z_1 + Z_2, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

$$\left\{\begin{aligned} L &= y_1 Z_1 - z_1 Y_1 + y_2 Z_2 - z_2 Y_2,\\ M &= z_1 X_1 - x_1 Z_1 + z_2 X_2 - x_2 Z_2,\\ N &= x_1 Y_1 - y_1 X_1 + x_2 Y_2 - y_2 X_2, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

puis, en exprimant que la force F_1 est normale au plan P,

$$\frac{X_1}{u} = \frac{Y_1}{v} = \frac{Z_1}{w}, \tag{5}$$

et que la force F_2 est dans ce plan,

$$uX_2 + vY_2 + wZ_2 = 0, \tag{6}$$

soit en tout onze équations pour déterminer les onze inconnues constituées par x_1, y_1, z_1, X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 et deux des coordonnées x_2, y_2, z_2, la troisième étant arbitraire puisqu'il s'agit d'un point quelconque de la droite D.

Calculons dès lors x_1, y_1, z_1.

Des deux premières équations (4) nous déduisons

$$\begin{aligned} Lv - Mu = {} & Z_1(vy_1 + ux_1) - z_1(vY_1 + uX_1) \\ & + Z_2(vy_2 + ux_2) - z_2(vY_2 + uX_2) \end{aligned}$$

ou, en tenant compte de (1), (2) et (6),

$$\begin{aligned} Lv - Mu &= Z_1(wz_1 + h) - z_1(vY_1 + uX_1) \\ &\quad - Z_2(wz_2 + h) + z_2 w Z_2 \\ &= -(uX_1 + vY_1 + wZ_1)z_1 - h(Z_1 + Z_2). \end{aligned}$$

Or, des équations (3), eu égard à (6), on tire

$$uX + vY + wZ = uX_1 + vY_1 + wZ_1.$$

Il vient donc finalement

$$Lv - Mu = -(uX + vY + wZ)z_1 - hZ,$$

d'où

$$z_1 = \frac{Mu - Lv - hZ}{uX + vY + wZ}.$$

Pour x_1 et y_1, il suffit de faire une permutation circulaire. On retrouve ainsi les formules ci-dessus.

Passons au plan Π. Ce plan, contenant le point (x_2, y_2, z_2) et la force de composantes (X_2, Y_2, Z_2), et étant perpendiculaire au plan P dont la normale a pour paramètres directeurs (u, v, w), aura une équation de la forme

$$\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0.$$

c'est-à-dire

$$x\ (wY_2 - vZ_2) + y\ (uZ_2 - wX_2) - z\ (vX_2 - uY_2)$$
$$-[x_2(wY_2 - vZ_2) + y_2(uZ_2 - wX_2) - z_2(vX_2 - uY_2)] = 0.$$

Or, si l'on tient compte des équations (5), les équations (3) donnent immédiatement

$$wY_2 - vZ_2 = wY - vZ, \qquad uZ_2 - wX_2 = uZ - wX,$$
$$vX_2 - uY_2 = vX - uY,$$

et les équations (4)

$$Lu + Mv + Nw$$
$$= x_2(wY_2 - vZ_2) + y_2(uZ_2 - wX_2) + z_2(vX_2 - uY_2).$$

Il vient, par suite, pour l'équation du plan Π,

$$x(vZ - wY) + y(wX - uZ) - z(uY - vX)$$
$$- Lu - Mv - Nw = 0.$$

Remarque. — Les équations (5) exprimant que F_1 est normale au plan P n'interviennent pas dans le calcul de x_1, y_1, z_1. Et, en effet, *le point* A *est indépendant de la direction de* F_1, *pourvu que* F_2 *soit dans le plan* P, attendu que, quelle que soit cette direction, le point A reste toujours celui où le moment résultant est normal au plan P, c'est-à-dire le foyer de ce foyer.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1908. COMPOSITION D'ALGÈBRE ET DE TRIGONOMÉTRIE.

Solution par M. Jean SERVAIS.

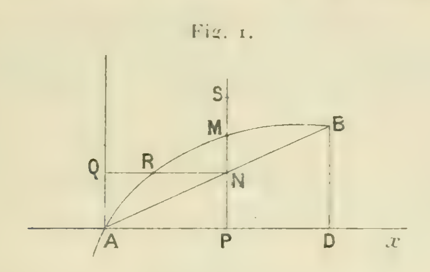
---

1. *Construire la courbe qui représente la fonction*

$$y = 4e^{\frac{\log \frac{x}{e}}{(\log x)^2}}.$$

II. *Soit* (C) *l'arc de cette courbe qui a pour origine le point* A, *où elle traverse l'axe des* x, *et pour*

Fig. 1.



extrémité le point B *qui correspond au maximum de* y. *Calculer l'aire* (Σ) *comprise entre l'arc* (C), *l'axe des* x *et l'ordonnée* BD *de* B.

III. *Soit* M *un point quelconque de* (C). *Menons la perpendiculaire* PM *à l'axe des* x; *soit* N *le point où elle rencontre la corde* AB. *Menons par* N *la parallèle à l'axe des* x *qui coupe en* R *l'arc* (C) *et en* Q *la parallèle à l'axe des* y *menée par* A. *Portons sur le prolongement de* PM *une longueur* MS *égale à* QR.

Lorsque M *décrit* (C), S *décrit un arc de courbe* (C'); *cet arc passe au point* A. *Calculer, à un centième près, le coefficient angulaire de la tangente à cet arc* (C') *au point* A.

IV. *Soit* (Σ') *l'aire balayée par le segment de droite* MS *lorsque* M *décrit* (C). *Montrer qu'il existe entre* (Σ) *et* (Σ') *une relation numérique qui subsiste lorsqu'on remplace dans les constructions précédentes l'arc* (C) *par un autre arc de courbe quelconque ayant les mêmes extrémités* A *et* B, *pourvu toutefois que ce nouvel arc soit situé au-dessus de* AB *et ne soit pas rencontré en plus d'un point par une*

parallèle quelconque à l'un ou l'autre des axes de coordonnées.

Nota. — *Le signe* log *représente des logarithmes népériens dont la lettre* e *représente la base.*

Les axes de coordonnées sont supposés rectangulaires.

I. Pour que y soit réel et bien déterminé, il faut que la valeur de x soit positive.

Si l'on pose

$$\log x = z,$$

on a

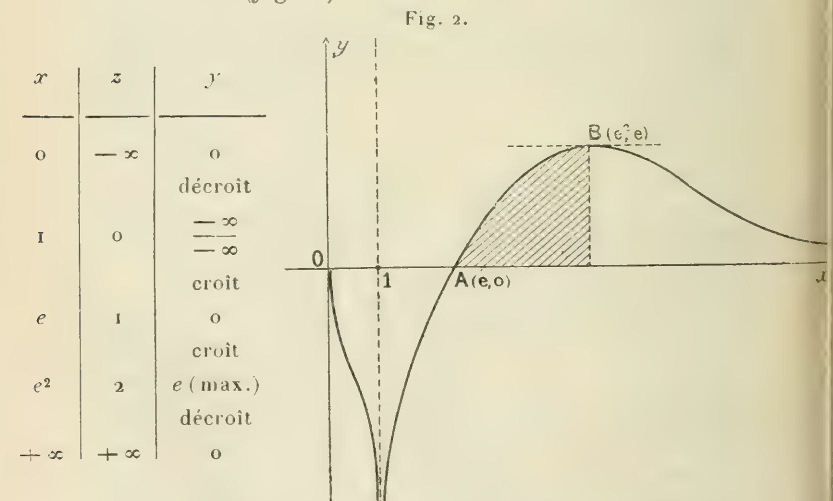
$$y = 4e\,\frac{z-1}{z^2}, \qquad \frac{dy}{dz} = 4e\,\frac{2-z}{z^3}.$$

La dérivée s'annule pour

$$z = 2, \qquad x = e^2$$

On a, par suite, le Tableau de variation et la courbe ci-dessous (*fig.* 2) :

Fig. 2.



x	z	y
o	$-\infty$	o
		décroît
I	o	$-\infty$ / $-\infty$
		croît
e	I	o
		croît
e^2	2	e (max.)
		décroît
$+\infty$	$+\infty$	o

La courbe coupe Ox au point A d'abscisse $x = e$.

La tangente à l'origine est verticale, car en ce point

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\,\frac{dz}{dx} = 4e\,\frac{2-z}{z^3 e^z};$$

la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est infinie, car le dénominateur $z^3 e^z$ tend vers zéro quand z croît indéfiniment par valeurs négatives.

II. L'aire demandée a pour valeur

$$\Sigma = \int_e^{e^2} y\,dx = \int_1^2 4e\,\frac{z-1}{z^2}\,e^z\,dz;$$

ceci s'écrit

$$\Sigma = 4e\int_1^2 \frac{1}{z}\,de^z + e^z\,d\left(\frac{1}{z}\right) = 4e\int_1^2 d\left(\frac{e^z}{z}\right),$$

$$\Sigma = 4e\left(\frac{e^2}{2} - e\right) = 2e^3 - 4e^2.$$

III. Soient x, y les coordonnées de M et x', y' celles de R. Le point N a pour coordonnées x, y' et, comme il est situé sur AB, on a

$$y' = \frac{x-e}{e-1}.$$

D'ailleurs on a

$$y' = 4e\,\frac{\log x' - 1}{(\log x')^2}.$$

Par suite, on a, entre x' et x, la relation

$$4e\,\frac{\log x' - 1}{(\log x')^2} = \frac{x-e}{e-1}.$$

Soit u le segment QR :

$$u = x' - e,$$

d'où

$$(1) \qquad 4e\frac{\log(u+e)-1}{[\log(u+e)]^2} = \frac{x-e}{e-1}.$$

Y étant l'ordonnée de S, on a

$$Y = y + u$$

et, par suite, le coefficient angulaire de la courbe (C′) est

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{du}{dx}.$$

Nous avons déjà calculé $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = 4e\frac{2-\log x}{x(\log x)^3};$$

pour avoir $\frac{du}{dx}$, différentions la relation (1) qui donne

$$4e\frac{2-\log(u+e)}{[\log(u+e)]^3}\frac{1}{u+e}du = \frac{dx}{e-1},$$

d'où

$$\frac{du}{dx} = \frac{u-e}{4e(e-1)}\frac{[\log(u-e)]^3}{2-\log(u+e)}.$$

Au point A on a

$$x = e, \qquad u = 0;$$

par suite,

$$\frac{dy}{dx} = 4, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{4(e-1)},$$

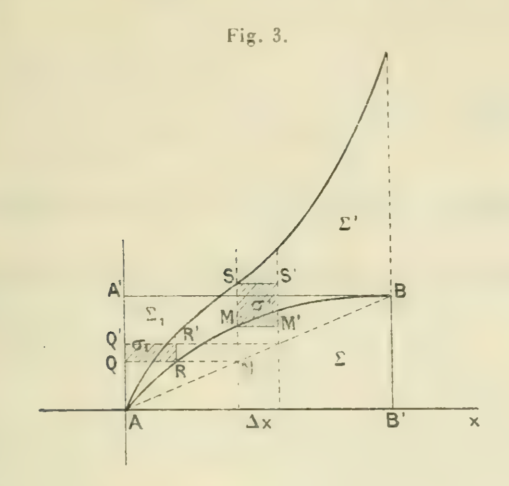
et enfin

$$\frac{dY}{dx} = 4 + \frac{1}{4(e-1)}.$$

IV. Donnons à x un accroissement Δx, et soit σ' le rectangle élémentaire MM′S′S (*fig.* 3) correspondant de Σ'; à ce rectangle correspond un rectangle élémentaire $\sigma_1 = \text{QRR}'\text{Q}'$ de l'aire Σ_1 comprise entre la courbe C,

la parallèle AA' à Oy et la parallèle A'B à Ox. σ' et σ_1,

Fig. 3.



ayant même hauteur u, sont entre eux comme leurs bases, $MM' = \Delta x$ et $QQ' = \Delta y'$:

$$\frac{\sigma'}{\sigma_1} = \frac{\Delta y'}{\Delta x} = m,$$

m étant le coefficient angulaire de AB.

On a donc

$$\sigma' = m\sigma_1$$

et par suite, en sommant les rectangles,

$$\Sigma' = m\Sigma_1.$$

Or, dans les hypothèses faites, Σ_1 est égale à la différence entre l'aire du rectangle AB'BA' et Σ. Si l'on désigne AB' par a, on a $BB' = ma$ et, par suite,

$$\Sigma' = m(ma^2 - \Sigma).$$

Cette relation est indépendante de la forme de la courbe.

Dans le cas particulier dont il s'agit,

$$m = \frac{1}{e-1}, \qquad a = e^2 - e;$$

on a donc

$$\Sigma' = \frac{1}{e-1}[e^2(e-1) - \Sigma].$$

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Caen.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Trouver une surface* S, *passant par la parabole définie, en coordonnées rectangulaires, par les équations*

$$x = R, \qquad y^2 = 2az,$$

et telle que le plan tangent en l'un quelconque de ses points, M, *rencontre à la distance constante* R *de l'origine la droite menée de cette origine à la projection du point* M *sur le plan* OXY.

II. *Étant donnés trois axes rectangulaires* OX, OY, OZ, *déterminer les trajectoires orthogonales des cercles qui touchent* OZ *en* O *et qui ont leurs centres sur la droite*

$$z = 0, \qquad x = a;$$

montrer que ce sont des cercles situés dans des plans perpendiculaires à OXZ.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation*

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} - 15 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 61 x \frac{dy}{dx} + 64 y = \frac{8}{x^2} + \frac{33}{x}.$$

(Juillet 1907.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Déterminer l'intégrale de l'é-*

quation

$$z(x+z)\frac{\partial z}{\partial x} - y(y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

qui se réduit à $\sqrt{y}$ *pour* $x = 1$.

II. *On considère la surface déterminée, en coordonnées rectangulaires, par les équations*

$$x = 3u + 3uv^2 - u^3,$$
$$y = 3v + 3u^2v - v^3,$$
$$z = 3u^2 - 3v^2.$$

Chercher les lignes de courbure et montrer que ce sont des cubiques situées dans des plans parallèles à OX *ou à* OY, *suivant la série dont elles font partie.*

(Novembre 1907.)

Marseille.

Épreuve théorique. — 1° *Exposer la théorie du changement de variables dans une intégrale double.*

2° *Vérifier que les deux systèmes de sphères définies par les équations*

$$ax\lambda^2 + (x^2 + y^2 + z^2 - a^2)\lambda + 2ay = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2 = 2a(x+y)\cos\mu - 2az\sin\mu,$$

où λ *et* μ *sont des paramètres arbitraires, ont même enveloppe.*

Déterminer les lignes de courbure de cette enveloppe, les centres de courbure principaux en un point et le lieu de ces centres de courbure.

Épreuve pratique. — 1° *Déterminer tous les zéros et tous les pôles de la fraction rationnelle*

$$R(z) = \frac{z+1}{(z-t)(z^4 - 2z^3 - 2z^2 - 2z + 1)},$$

où t est un pôle simple dans le plan des z, et indiquer leurs ordres respectifs.

2° *On isole chaque pôle de* R(z), *y compris t, dans un contour fermé simple ne contenant que ce pôle.*

Calculer les valeurs de l'intégrale

$$\int R(z)\,dz$$

le long des contours ainsi formés, le point z se déplaçant dans le sens positif.

3° *Les intégrales ainsi obtenues sont des fonctions de t. Démontrer que leur somme est nulle et que, de ce fait, on peut déduire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle en t*

$$\frac{t-1}{t^4-2t^3+2t^2-2t+1}.$$

4° *Calculer la fonction primitive de cette fraction.*

(Novembre 1907.)

Montpellier.

Épreuve écrite. — *Une courbe C, rapportée à trois axes rectangulaires, est représentée par les équations*

$$x = 2abt,$$
$$y = a^2 \log t,$$
$$z = b^2 t^2,$$

où t est un paramètre variable.

1° *Calculer l'arc d'une portion de la courbe C.*

2° *Déterminer le rayon de courbure, le rayon de torsion et les coordonnées du centre de courbure en un point quelconque de la courbe C.*

3° *Un cylindre a ses génératrices parallèles à l'axe des Z, et pour directrice la courbe C; calculer la surface de ce cylindre comprise entre la courbe C, le plan xOy et deux génératrices.*

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} - 2(1-a)x^2\frac{d^2y}{dx^2} - a^2\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = bx + c.$$

Examiner ce que devient la solution générale dans le cas particulier où $a = 1$. (Novembre 1907.)

Paris.

ÉPREUVE THEORIQUE. — I. *On considère l'équation aux différentielles totales*

$$(1)\quad dz = (A z^2 + 2 B z + C)\,dx + (A_1 z^2 + 2 B_1 z + C_1)\,dy,$$

où A, B, C, A_1, B_1, C_1 *sont des fonctions des deux variables indépendantes* x *et* y.

1° *On demande de former les conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions* A, B, C, A_1, B_1, C_1 *pour que l'équation* (1) *soit* complètement intégrable.

2° *Ces conditions étant supposées satisfaites, expliquer comment on achèvera l'intégration de cette équation, si l'on connaît une ou plusieurs intégrales particulières.*

EXEMPLE. — *Étant donnée une famille de courbes* Γ, *représentées dans un système d'axes rectangulaires par les deux équations*

$$x^2 - 2z^2 = a, \qquad 5y^3 - 5x^2 z^3 + m x^3 z + 4 z^5 = b,$$

où a *et* b *sont des paramètres arbitraires et* m *un coefficient constant, on demande de déterminer ce coefficient* m *de façon que ces courbes* Γ *soient les trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces, et de trouver cette famille de surfaces.*

II. *Soit* $f(x, y)$ *une fonction continue des deux variables* x *et* y. *Démontrer que l'intégrale double*

$$F(x, y) = \int\int f(u, v)\,du\,dv,$$

étendue à l'aire du triangle AMB, *limité par la bissectrice* OAB *de l'angle* $x O y$, *et par les parallèles aux axes menées par un point variable* M, *est une fonction des coordonnées* x *et* y *de ce point* M *qui satisfait à la relation*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + f(x, y) = 0.$$

En déduire une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + f(x, y) = 0$$

qui soit égale à x^2, *et dont la dérivée* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *soit égale à* e^x *lorsque le point* M *est situé sur la bissectrice de l'angle* $x\mathrm{O}y$.

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2-3x+3}{(x+1)^3}\, e^{-x} \sin x \, dx.$$

(Juin 1907.)

I. Épreuve théorique. — 1° *Déterminer les deux fonctions* $\mathrm{P}(t)$ *et* $\varphi(t)$ *de telle façon que la fonction* y, *représentée par la formule*

$$y = (x-a)\int_b^x f(t)\,\mathrm{P}(t)\,dt + (x-b)\int_a^x f(t)\,\varphi(t)\,dt,$$

soit une intégrale de l'équation différentielle

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

pour toutes les formes possibles de la fonction $f(x)$. *Quelles sont les conditions qui déterminent cette intégrale particulière ?*

2° *Soient* R_1 *et* R_2 *les rayons de courbure principaux d'une surface de révolution* S *en un point* M *de cette surface,* R_1 *désignant le rayon de courbure correspondant au centre de courbure situé sur l'axe.*

On demande : 1° *de former l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire la méridienne* C *de la surface* S *pour que le rapport* $\frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}_2}$ *soit égal à une fonction donnée de l'angle* φ *que fait avec l'axe le plan tangent au point* M *à la surface* S ; 2° *d'intégrer cette équation différentielle en supposant qu'on a*

$$\frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}_2} = \frac{m}{\cos\varphi} - 1,$$

m *étant une constante donnée. Cas où* $m = 0$.

II. Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos 3x}{\cos x + 2}\, dx.$$

(Octobre 1907.)

Poitiers.

Épreuve théorique. — I. *En un point* M(x, y, z) *d'une surface* S *on mène la normale* MN *qui rencontre en* N *le plan des xy et le plan tangent qui coupe ce même plan des xy suivant une droite* D :

1° *Soit* δ *la distance du point* N *à la droite* D; *on demande de former l'équation aux dérivées partielles des surfaces* S *pour lesquelles on a*

$$\delta = f(z),$$

f étant une fonction donnée.

2° *Montrer qu'en prenant comme nouvelle fonction inconnue,* Z, *une certaine fonction de z on peut ramener cette équation à la forme*

$$P^2 + Q^2 = 1 \qquad \left(P = \frac{\partial z}{\partial x},\ Q = \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Intégrer en appliquant cette remarque.

3° *Former l'équation différentielle des projections orthogonales sur le plan des xy, des trajectoires orthogonales des sections de l'une des surfaces* S *par les plans* $z =$ const.; *intégrer cette équation et interpréter géométriquement le résultat.*

II. *A quelles conditions doivent être assujetties les constantes réelles a et b pour que l'intégrale définie*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\cos x - a)(\cos x - b)} \text{ ait un sens ?}$$

Calculer sa valeur en introduisant la variable complexe $z = e^{ix}$, *et appliquant la théorie des résidus.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'aire de la partie du cercle osculateur en un point d'une ellipse, qui est extérieure à l'ellipse.* (Juillet 1907.)

Rennes.

Épreuve théorique. — I. *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{x - my} = \frac{dy}{y - mx} = \frac{dz}{z},$$

où m désigne une constante positive.

Les axes étant supposés rectangulaires, montrer que la courbe intégrale (C) *qui passe par le point* (M_0) *de coordonnées a, o, c peut être représentée, en coordonnées semi-polaires, par les équations*

$$r = a e^{\frac{\theta}{m}},$$

$$z = \frac{c}{a} r.$$

Calculer l'arc $M_0 M$ *de la courbe* (C) *compté à partir de* M_0, *les coordonnées du centre de gravité de l'arc* $M_0 M$, *puis la portion de la surface du cône*

$$z = \frac{c}{a} r$$

qui est comprise entre les génératrices OM_0, OM *et l'arc* $M_0 M$ *de* (C).

II. 1° *On considère la courbe* (C) *intégrale du problème précédent; montrer que la tangente et la normale principale font des angles constants avec* Oz.

Quelle propriété présente la courbe (C) *sur le cylindre projetant cette courbe sur le plan* xOy ?

Est-il possible qu'une surface lieu d'une infinité de courbes (C) *admette toutes ces courbes comme lignes géodésiques ?*

2° *Lorsque le point* M_0 *décrit dans le plan* zOx *la droite*

$$z = px + q,$$

les courbes (C) *correspondantes engendrent une surface* S; *exprimer les coordonnées d'un point quelconque de cette surface en fonction des deux paramètres a et* θ.

Montrer que les lignes de la surface S *correspondant à* $\theta =$ const. *sont des droites, et que ces droites coupent toute courbe* (C) *génératrice sous un angle constant.*

Démontrer que le long d'une courbe (C) *la normale principale fait un angle constant avec la normale à la surface.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *L'expression* $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x\sqrt{y^2-x^2}} + \dfrac{dx}{x}$ *est une différentielle exacte.*

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{a,b}^{x,y}\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x\sqrt{y^2-x^2}} + \frac{dx}{x}\right)$$

prise le long d'un chemin allant du point (a, b) *au point* (x, y).

II. *Si* P *et* Q *sont des fonctions homogènes de même degré des deux variables* x *et* y, *l'expression*

$$\frac{Q\,dx - P\,dy}{Qx - Py}$$

est une différentielle exacte.

Appliquer ce résultat à l'intégration de l'équation différentielle

$$(y - \sqrt{y^2-x^2})\,dx - x\,dy = 0.$$

Indiquer d'autres procédés pour intégrer la même équation. (Novembre 1907.)

CERTIFICATS DE GEOMETRIE SUPERIEURE.

Paris.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On considère les hyperboloïdes de révolution à une nappe représentés par l'équation*

$$\frac{x^2}{a-\rho} + \frac{y^2+z^2}{b-\rho} = 1.$$

où a et b sont des constantes et ρ un paramètre variable. On demande : 1° de former l'élément linéaire de la surface réglée engendrée par celles de leurs génératrices rectilignes qui rencontrent l'axe des z; 2° de déterminer les lignes asymptotiques de cette surface.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer le mouvement stationnaire de l'électricité sur une plaque circulaire homogène pourvue de deux électrodes qui débitent des quantités d'électricité égales et contraires.*

Dessiner la forme générale des lignes de courant et des lignes équipotentielles. (Mars 1907.)

QUESTIONS.

2097. Étant donnés dans un plan un cercle et un point H, on considère les triangles qui ont pour orthocentre le point H et dont un côté est un diamètre MM′ du cercle.

1° Trouver le lieu du troisième sommet P.

2° Trouver l'enveloppe (E) des droites PM, PM′. Les points de contact de ces droites avec l'enveloppe étant N et N′, faire voir que la droite NN′ passe en H et est parallèle à MM′.

3° Le cercle circonscrit au triangle PMM′ passe par deux points fixes; il en est de même du cercle des neuf points. Les pieds des hauteurs du triangle PMM′ étant K sur MM′, I sur PM, I′ sur PM′, la droite II′ passe par un point fixe.

4° La conique de foyer H inscrite au triangle PMM′ est tangente à deux droites fixes; son petit axe a une longueur constante.

On désignera par a le rayon du cercle donné, par c la distance du point H au centre O de ce cercle.

(G. FONTENÉ.)

2098. Construire une hyperbole connaissant en position : un axe, un cercle bitangent dont le centre est sur l'axe, une direction asymptotique, et les points de rencontre avec l'axe de la tangente et de la normale en un point de l'hyperbole.

(R. GILBERT.)

[K14d]

SUR L'EXPRESSION DE CERTAINS VOLUMES;

PAR M. G. FONTENÉ.

I.

De divers théorèmes connus on peut dégager l'énoncé suivant :

THÉORÈME. — *Si dans un solide, toute section parallèle à un plan donné* P *a son aire exprimée par une fonction du second degré de la cote du plan sécant,*

$$S = az^2 + bz + c,$$

le volume d'un segment quelconque compris entre deux plans parallèles au plan P *admet les diverses expressions suivantes :*

$$V = \frac{h}{6}(B + B' + 4B''), \tag{1}$$

$$V = \frac{h}{4}(B + 3S), \tag{2}$$

$$V = B''h + \frac{ah^3}{12}. \tag{3}$$

B et B′ sont les aires des deux bases, B″ est l'aire de la section faite par un plan parallèle aux bases et équidistant des bases, S est l'aire de la section faite par un plan parallèle aux bases aux deux tiers de la hauteur à partir de la base B. Les formules précédentes se déduisent de celle-ci :

$$V = \frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch,$$

les cotes étant comptées depuis le plan de la base B.

1° *a*. La formule (1) a été donnée par Mascheroni pour le volume du *prismatoïde*, et on l'établit alors directement sans faire intervenir l'expression de l'aire des sections parallèles aux bases; il est d'ailleurs facile de vérifier que cette aire est donnée par une fonction du second degré de la cote du plan sécant. *La même formule s'applique en remplaçant les polygones* B *et* B′ *par deux aires planes quelconques situées dans des plans parallèles, et en prenant pour surface latérale une surface réglée quelconque.*

Voici un exemple qui n'a peut-être pas été remarqué. Considérons dans l'espace n droites fixes α, β, γ, ... et un plan P; un plan sécant parallèle au plan P rencontre les droites fixes en des points A, B, C, ..., ce qui détermine un polygone ABC...; si le plan se déplace, ce polygone engendre un volume qui est de la nature des volumes ci-dessus; la surface engendrée par le côté AB, par exemple, est en effet un paraboloïde hyperbolique, et il suffit de considérer les génératrices du second système pour que la portion de surface latérale correspondante se trouve définie de la manière indiquée plus haut. On peut d'ailleurs vérifier, dans le cas de trois droites, que l'aire S a une expression de la forme indiquée; si le trinome en z a des racines, il existe deux droites Δ', Δ'' parallèles au plan P et qui rencontrent les trois droites α, β, γ; dans le cas particulier où ces trois droites sont parallèles à un même plan, l'une des droites Δ', Δ'' est rejetée à l'infini, et l'on a par suite $a = 0$; on a donc alors simplement

$$V = B''h.$$

b. La formule (1) a été donnée par Sarrus pour le cas général indiqué dans l'énoncé.

Il est facile de l'établir directement pour le cas du *segment sphérique*. La formule ordinaire relative à ce volume est

$$V = \frac{\pi(a^2 - b^2)h}{2} + \frac{\pi h^3}{6}.$$

Or, si l'on désigne par c le rayon de la section faite dans la sphère par un plan parallèle aux bases et équidistant des bases, on a

$$c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{h^2}{4};$$

on a donc

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi h}{6}(3a^2 + 3b^2 + h^2) \\ &= \frac{\pi h}{6}(3a^2 + 3b^2 + 4c^2 - 2a^2 - 2b^2) \\ &= \frac{h}{6}(\pi a^2 + \pi b^2 + 4\pi c^2). \end{aligned}$$

(On peut encore établir directement la formule par l'*anneau sphérique*, et en conclure qu'elle s'applique au segment sphérique.)

On passe aisément de la sphère à l'ellipsoïde de révolution, de là à l'ellipsoïde à axes inégaux, de là enfin au cas où les bases du segment ne sont pas perpendiculaires à un axe principal, deux solides compris entre deux plans parallèles ayant même volume si tout plan parallèle à ceux-là et compris entre eux détermine dans les deux solides des sections de même aire (axiome de Cavalieri).

2° La formule (2) se trouve, pour le cas du prismatoïde, dans l'Ouvrage récent de M. Halsted : *Rational Geometry*. M. Ch. Michel a remarqué, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et physiques élémentaires*, que cette formule est le cas le plus simple d'une

formule générale

$$V = \frac{h}{1+\lambda}(X + \lambda Y),$$

X et Y étant les aires de deux sections faites par des plans parallèles aux bases, de part et d'autre de la section moyenne, à des distances du plan de cette section données par les formules

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{1} = \frac{h}{\sqrt{12\lambda}};$$

la formule (2) correspond à la valeur $\lambda = 3$.

3° La formule (3) a été donnée par Maclaurin (*Traité des fluxions*) pour le cas de l'ellipsoïde de révolution. Le coefficient a est alors $-\pi\frac{b^2}{a^2}$, b étant le rayon équatorial.

Dans le cas du segment sphérique, on a la formule

$$V = \pi c^2 h - \frac{\pi h^3}{12},$$

qu'on déduit de la formule ordinaire au moyen de la relation déjà écrite

$$c^2 = \frac{a^2 - b^2}{2} - \frac{h^2}{4}.$$

La formule de Maclaurin a été retrouvée par Desboves (*Questions d'Algèbre*, 1873) pour le cas du segment sphérique, et, pour le cas de l'ellipsoïde de révolution, par le frère Gabriel-Marie (*Géométrie*, F. I. C., 1875) et par Desboves (*Nouvelles Annales*, 1877, p. 227 et 278).

II.

Le volume du prismatoïde est encore donné par la

formule

$$V = B''h + P \times \frac{h}{3},$$

P étant l'aire d'un polygone équiangle aux bases et qui a pour côtés la demi-différence de leurs côtés homologues (on considère les faces triangulaires comme des trapèzes ayant une base nulle). Cette formule a été donnée par M. Koppe (*Journal de Crelle*, t. 18, 1838, p. 275); on en trouve une démonstration dans les *Nouvelles Annales* (2e série, t. VI, p. 408). Cette formule est bien connue dans le cas du tronc de cône.

NOTES.

1. Une Note des *Nouvelles Annales* (1848, p. 245) donne le renseignement suivant : On trouve, dans le *Lilavati* (Chap. VIII, § 221), cette évaluation du volume d'une pyramide tronquée à bases rectangles

$$V = \frac{h}{6}[ab + a'b' + (a + a')(b + b')],$$

a et b, a' et b' étant les dimensions des deux bases.

Une traduction du *Lilavati* se trouve dans l'Ouvrage de Colebrookes : *Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhaskara*, 1817.

2. On peut considérer un tétraèdre comme un prismatoïde, les plans qui donnent B, B', B'' étant parallèles à deux arêtes opposées AB et CD; on retrouve la formule connue

$$V = \frac{1}{6} AB \times CD \times \mu,$$

μ étant le moment des deux droites AB et CD (*Nouvelles Annales, ibid.*, p. 241).

[K3 et K12]

LES CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES EXÉCUTÉES AU MOYEN DE LIGNES DROITES ET D'UN CERCLE FIXE, D'APRÈS JACQUES STEINER (BERLIN, 1833).

PAR M. ALBERT LÉVY,
Professeur au Lycée Voltaire.

Ce travail a pour but de faire connaître en le résumant un Mémoire souvent ignoré de Steiner.

Toutes les constructions géométriques ordinaires peuvent se ramener à une seule : trouver les points d'intersection d'une droite et d'une circonférence.

Mais de ce que les points d'intersection d'une droite et d'une circonférence donnée sont connus on peut tout d'abord déduire facilement la solution des problèmes suivants :

Mener des parallèles.

Étant donnée une longueur, la rendre un certain nombre de fois plus grande, ou la diviser en parties égales.

Mener par un point une droite qui fasse avec une droite donnée un angle donné.

Partager un angle en deux parties égales ou le rendre un certain nombre de fois plus grand.

Mener par un point une droite égale en grandeur et en direction à une droite donnée.

On en déduit ensuite le moyen d'obtenir les points d'intersection d'une droite et d'une circonférence donnée par un rayon mais non tracée.

Ceci dit, l'auteur montre dans un premier Chapitre

comment les propriétés du quadrilatère complet permettent, au moyen de la règle seule, d'obtenir le quatrième point d'une division harmonique connaissant les trois premiers, ou le quatrième rayon d'un faisceau harmonique.

CHAPITRE II.

CONSTRUCTIONS EFFECTUÉES AU MOYEN DE LA RÈGLE, AVEC CERTAINES DONNÉES.

A. On connaît deux parallèles, ou un segment partagé dans un rapport rationnel donné.

I. On connaît trois points en ligne droite G, D, F; D est le milieu de GF, mener par un point donné H la parallèle à GDF. On mène HG, HF; sur GH on prend

Fig. 1.

un point quelconque A; on mène AD, AF; AD coupe HF en C, GC coupe AF en I, IH est la droite cherchée.

II. Étant données deux parallèles GF, IH, trouver le milieu de GF. On joint un point quelconque à deux points G et F pris sur la première droite, les droites AF, AG rencontrent la seconde en IH, on joint FH, GI qui se coupent en C, la droite AC coupe GF au point D demandé.

III. Étant données deux parallèles, mener, par un point donné, une droite parallèle aux deux premières.

Sur la première droite on prend deux points quelconques G et F, on en détermine le milieu, on est ramené au premier problème.

IV. On a deux droites parallèles et sur l'une d'elles une longueur BC.

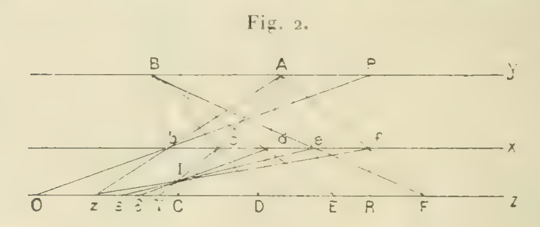
a. Prendre sur la même droite, à partir d'un point donné, n fois la longueur BC.

b. Partager BC en un certain nombre de parties égales ou en deux parties proportionnelles à deux nombres donnés.

c. Construire sur la même droite une longueur qui soit à BC dans un rapport rationnel donné.

Par un point quelconque A on mène une parallèle

Fig. 2.



aux deux droites données. On joint AB, AC qui coupent la deuxième droite en b, c.

On joint Cb qui coupe Ay en G. Gc coupe Bx en D,

$$CD = DC.$$

AD coupe ba en d, on joint bd qui coupe Bx en E,

$$DE = CD.$$

et ainsi de suite.

On a

$$BF = 4\,BC.$$

a. Soit à porter une longueur $= 4$BC; à partir de O on joint Ob qui coupe Ay en P, on joint Pf qui coupe Bx en R. OR est le segment cherché.

b. Soit à partager BC en n parties égales; soit, par exemple, $bf = n\,bc$; on joint Cb, Bf qui se coupent en I; on joint Ic, Id, Ie qui coupent OF en γ, δ, ε. Pour partager dans un rapport $p : q$, on prend $bk = (p - q)\,bc$, $be = p.\,bc$; on joint Bk, Cb qui se coupent en I, on joint Ie qui coupe Bx en ε. ε est le point cherché.

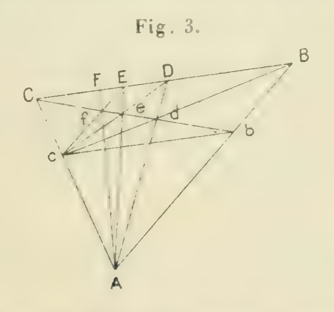
c. Soit à trouver une droite qui soit à BC dans le rapport $\frac{q}{p}$ et supposons le rapport $\frac{ke}{eb} = \frac{q}{p}$.

On joindra Bb, Ce et par le point où se coupent les deux droites on mènera la ligne qui passe par k et qui rencontrera BC en N, CN sera la droite cherchée, car on aura $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CN}} = \frac{p}{q}$.

Remarque. — Si l'on doit seulement trouver une longueur qui est à BC comme 1 à n (n entier), on peut procéder ainsi :

On joint un point A à BC; AB, AC coupent la parallèle en b, c. Bc, Cb se coupent en d; Ad coupe BC en D

Fig. 3.



qui est le milieu de BC. cD coupe Cb en e, Ae coupe BC en E, CE $= \frac{1}{3}$ BC, car dans le quadrilatère com-

plet Aced (dont les diagonales sont Ae, cd et CD) les quatre points B, E, D, C forment une division harmonique $\frac{CE}{ED} = \frac{BC}{BD} = 2$.

$$CE = ED, \qquad CE = \frac{1}{3} BC.$$

De même aE coupe Cb en f, Af coupe BC en F, $CF = \frac{1}{4}$ BC, et ainsi de suite.

Ce procédé ingénieux, dit Steiner, paraît avoir été indiqué pour la première fois par un capitaine d'artillerie, un Français, Brianchon (*Application de la théorie des transversales,* Paris, 1818).

On a sur une droite deux longueurs BD, DC dont le rapport rationnel est connu, on demande de mener au moyen de la règle seule une parallèle à la droite donnée par un point donné.

Ce problème ayant plus d'intérêt théorique que d'utilité pratique, Steiner indique une solution sommaire, abandonnant à d'autres le soin d'en trouver une plus facile et plus commode.

Le rapport rationnel des deux longueurs BD, CD peut toujours être exprimé par le rapport de deux nombres entiers a et b premiers entre eux ; soit $a > b$. On construira le point E, conjugué harmonique de D par rapport à B et C, et l'on aura $\frac{BD}{CD} = \frac{BE}{CE}$; si $CE = x$,

$$\frac{a}{b} = \frac{a + b + x}{x}, \qquad x = \frac{b(a - b)}{a - b};$$

soit $BC = a + b = y$,

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{a - b};$$

on peut donc déduire des deux longueurs BD, CD deux

longueurs BC, CE dont le rapport est celui de la différence au plus petit des deux nombres C. C'est pourquoi en répétant le procédé on arrivera à deux longueurs égales, car si $a-b>b$, par une nouvelle construction on aura deux longueurs dont le rapport est $\frac{b}{a-2b}$, on continuera jusqu'à ce qu'on obtienne $\frac{b}{a-nb}$ où $a-n<b$ soit c. On trouvera ensuite deux longueurs dont le rapport est $\frac{c}{b-c}$, et ainsi de suite; comme a, b, c sont des nombres entiers qui vont en diminuant, on arrivera à deux longueurs dont le rapport est $\frac{1}{1}$.

Si par exemple $a=2$, $b=1$, on aura $x=3$. C sera le milieu des deux points B et E.

B. On donne deux couples de droites parallèles, ou deux longueurs partagées en des rapports rationnels, avec un couple de parallèles et une droite partagée en un rapport rationnel.

I. On a deux couples de parallèles, c'est-à-dire un parallélogramme, on demande, au moyen de la règle seule :

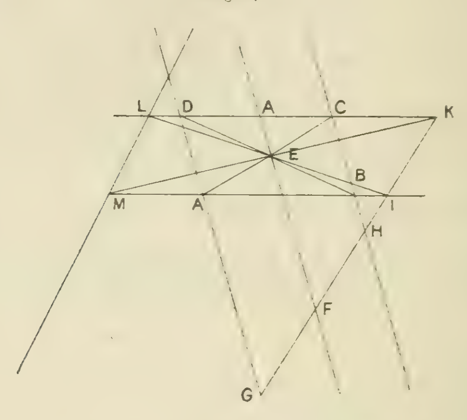
a. De tracer par un point donné une parallèle à une droite quelconque donnée;

b. De partager une longueur quelconque dans un rapport donné.

Soit ABCD le parallélogramme donné, dont les diagonales se coupent en E; par le point E on mène la parallèle aux droites AD et BC. Soit GHK une droite donnée, qui coupe les trois parallèles en G, F, H. F sera le milieu de GH et l'on saura mener par un point quel-

conque la parallèle à GH. On pourra aussi joindre IE, KE, la droite LM étant parallèle à IK, on saura mener

Fig. 4.



par un point quelconque une parallèle à ces deux droites.

c. La deuxième question se résout au moyen de la première.

II. On connaît :

a. Trois parallèles qui coupent une droite donnée dans un rapport rationnel donné ;

Ou *b*. Sur deux parallèles deux longueurs qui sont dans un rapport donné ;

Ou *c*. Deux parallèles quelconques et une longueur partagée dans un rapport donné ;

Ou *d*. Deux longueurs quelconques situées sur deux droites qui se coupent et partagées dans des rapports donnés.

On demande :

α. De mener par un point quelconque une parallèle à une direction donnée ;

β. De partager une longueur quelconque dans un rapport donné.

Les trois parallèles coupent la droite en A, C, E, de telle sorte que $\frac{AC}{CE} = \frac{p}{q}$ $\left(\frac{p}{q}\right.$ étant irréductible$\left.\right)$. On prend $AG = p$ fois une longueur quelconque mesurée sur AB

Fig. 5.

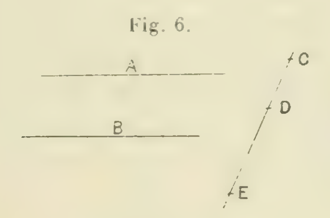
et $CB = q$ fois cette longueur, les droites CG et BE sont parallèles ; on est ramené au cas précédent.

Soient AB, CD les parallèles données, AB et CH les longueurs dont on connaît le rapport $\frac{p}{q}$; AC et CH se coupent en E (figure précédente) et l'on a

$$\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{CH} = \frac{p}{q}, \qquad \frac{AC}{CE} = \frac{p-q}{q},$$

on est ramené au cas précédent.

Fig. 6.



Soient A et B les deux parallèles données et soit

$$\frac{CD}{DE} = \frac{p}{q};$$

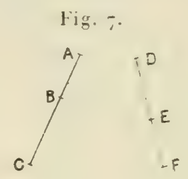
on peut mener par les trois points C, D, E des parallèles aux droites A et B, on est ramené au cas *a*.

Soient

$$\frac{AB}{BC} = \frac{p}{q}, \qquad \frac{DE}{EF} = \frac{r}{s};$$

par les points D, E et F de la seconde menons des paral-

Fig. 7.



lèles à la première, nous sommes ramenés au cas *a*.

C. On donne un carré.

Si le parallélogramme devient un carré on pourra, en plus des problèmes précédents, résoudre les problèmes suivants :

a. Mener par un point donné une perpendiculaire à une droite donnée.

b. Partager un angle droit en deux parties égales.

c. Multiplier un angle donné par un angle donné *n*.

Soit ABCD le carré donné ; si par le centre de ce carré on mène une droite quelconque GF, il est facile d'avoir la droite IK qui lui est perpendiculaire en son milieu E ; par F on mène FH parallèle à BC et par H la parallèle HI à la diagonale AC. IEK est perpendiculaire à GF, car

$$FC = HB = BI \qquad \text{et} \qquad BF = CE.$$

$$\widehat{EBI} = \widehat{ECF};$$

les deux triangles ECF, EBI sont égaux, donc

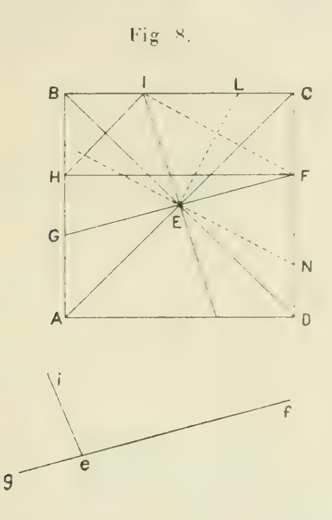
$$\widehat{BEI} = \widehat{ECF}$$

et, par suite,

$$\widehat{IEF} = 1 \text{ droit}.$$

De plus IE = EF, le triangle IEF est isoscèle, la bissectrice EL de l'angle droit IEF est perpendiculaire

Fig. 8.



sur IF, on aura donc cette bissectrice en menant EN parallèle à IF et EL perpendiculaire à EN.

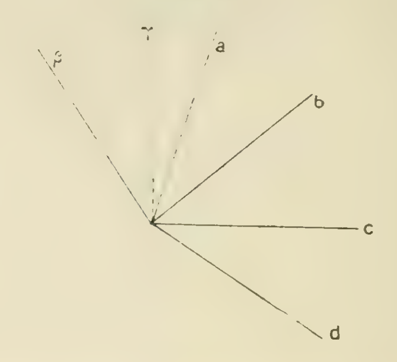
Si l'on demande de mener par un point i une perpendiculaire à une droite gf, on mènera par E la parallèle GF à gf, on tracera la perpendiculaire IK à GF et par i on mènera la parallèle ie à IK.

Pour partager en deux parties égales un angle droit ief, on mène GI, IK parallèles à ie, gf; on trace EL comme il a été dit et par e on lui mène la parallèle el.

Le cas (c) se déduit du cas (a), car soit un angle dont les côtés sont a, b. Élevons à b la perpendiculaire par le sommet de l'angle donné, soit β; prenons le rayon conjugué harmonique de a par rapport à C et β.

soit c; angle (ab) = angle (bc), (ac) est le double de (ab). Élevons à c la perpendiculaire et doublons

Fig. 9.



l'angle (bc) en (bd), $(ad) = 3(ab)$ et ainsi de suite (*fig.* 9).

CHAPITRE III.

SOLUTION DE TOUS LES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE AU MOYEN DE LA RÈGLE, ÉTANT DONNÉE UNE CIRCONFÉRENCE.

Soit O le centre de la circonférence donnée supposée tracée, nous considérerons comme connus les points d'intersection d'une droite tracée et de ce cercle.

Problème I. — *Mener par un point donné une parallèle à une droite donnée.*

a. La droite donnée passe par le centre du cercle; on connaît sur cette droite trois points a, O, b; O est le milieu de ab, on est ramené à un problème traité.

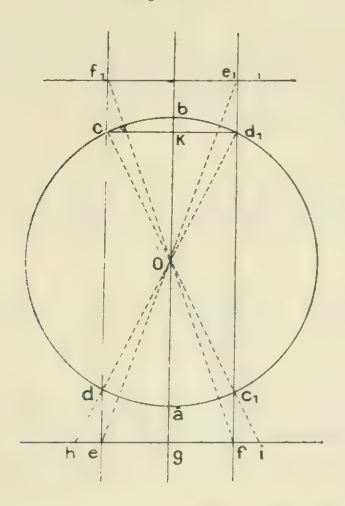
b. La droite cd coupe le cercle, mais elle ne passe pas par le centre, soit cd (*fig.* 10).

cO coupe le cercle en c_1, dO le coupe en d_1, la

droite c_1d_1 est parallèle à cd. On a deux parallèles cd, c_1d_1, on sait leur mener une parallèle par un point donné.

c. La droite donnée a une position quelconque, soit ef; soit abg un diamètre qui coupe la droite en g;

Fig. 10.



par un point quelconque c du cercle on mène la parallèle à ab; on mène les diamètres cc_1, dd_1, les droites cd et c_1d_1 coupent la droite donnée en e et f; g est le milieu de ef, on est ramené à un problème antérieur.

Autre solution. — On mène par deux points quelconques de la droite h et i les diamètres hcc_1, idd_1 : on joint cd, c_1d_1 qui coupent la droite en e et f; on mène eO qui coupe c_1d_1 en e_1, fO qui coupe cd en f_1 : e_1f_1 est parallèle à ef, on sait leur mener une parallèle par un point donné.

Remarque. — Si l'on devait mener des parallèles

à plusieurs droites données, il serait bon de tracer un diamètre *ab* et deux cordes qui lui sont parallèles *cd*, $c_1 d_1$, car ces trois droites coupent chacune des droites données en trois points dont l'un est au milieu des deux autres.

Problème II. — *Étant donnée sur une droite une certaine longueur, la rendre n fois plus grande ou la diviser en parties égales, ou construire une longueur qui soit à la longueur donnée dans un rapport donné.*

On mène par un point une parallèle à la droite qui porte la longueur donnée, on est ramené à un problème précédent.

Problème III. — *Mener par un point donné une perpendiculaire sur une droite donnée.*

A. *Au moyen de parallèles.* — *a*. La droite donnée est un diamètre du cercle donné, soit *ab* (*fig.* 10); on mène la corde *cd* parallèle à *ab*, le diamètre dd_1; cd_1 est perpendiculaire à *ab*; *ab* coupe cd_1 en son milieu K. On sait mener par un point une parallèle à cd_1 dont on connaît le milieu. Le problème est résolu.

En particulier, pour trouver le diamètre perpendiculaire à *ab*, qu'on suppose menées les droites *ac*, *bd* et qu'on joigne leur point d'intersection au centre O.

b. La droite donnée est une corde de cercle, soit *cd*. On mène les diamètres cc_1, dd_1; les droites cd_1, $c_1 d$ sont perpendiculaires à *cd* et, par suite, parallèles entre elles; on sera ramené à mener par un point une parallèle à ces deux droites.

c. La droite ne coupe pas le cercle, soit *ef*.

On mène une corde parallèle à *ef*, cd_1, puis les dia-

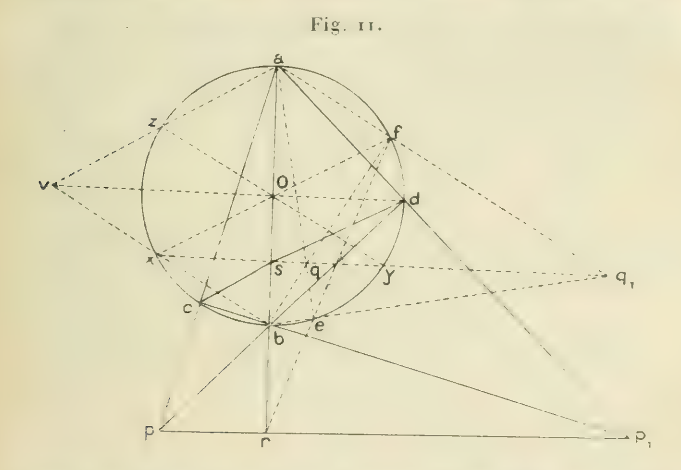
mètres cc_1, $d_1 d$ et les cordes cd, $c_1 d_1$: elles sont perpendiculaires à ef et sont parallèles entre elles, on est ramené à un problème connu.

B. *Au moyen de propriétés harmoniques.* — *a.* La droite donnée est un diamètre du cercle donné aOb.

Le point donné P n'est pas sur ab ; on joint pa, pb qui coupent la circonférence en c et d ; ad, bc se coupent en p_1 ; pp_1 est la droite demandée.

En effet, dans le triangle app_1, $p_1 c$, pd sont deux hauteurs, ab est la troisième hauteur, ou pour s'ap-

Fig. 11.



puyer sur des propriétés harmoniques, on mène la corde cd qui coupe ab en s. On voit que pp_1 est la polaire de s.

Si le point donné était en r, on mènerait une droite quelconque ref ; ae, bf se coupent en q ; af, be se coupent en q_1 ; qq_1 coupe ab en s ; par s menons une corde quelconque cd ; ac, bd se coupent en p ; pr est la droite cherchée.

b. La droite a une position quelconque, soit pp_1 ou

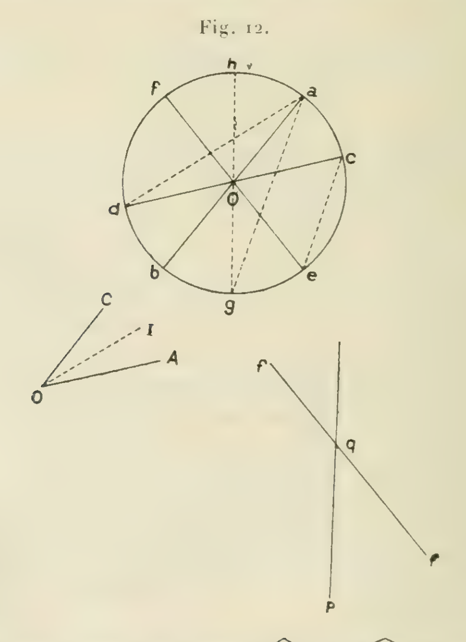
qq_1 ; on cherche le pôle s ou r de la droite, on mène le diamètre Os ou Or qui est perpendiculaire à la droite donnée. On cherche la polaire de r, soit xy ; on trace le diamètre yOz ; az, bx se coupent en v ; le diamètre vO est parallèle à pp_1 ; on n'a plus qu'à mener une perpendiculaire à ce diamètre par le point donné. Pour la droite qq_1 la solution est un peu plus simple.

Problème IV. — *Par un point donné mener une droite faisant avec une droite donnée un angle donné.*

Soient $\widehat{AOC}$ l'angle donné, EF la droite donnée et p le point donné (*fig.* 12).

On mène les diamètres ab, cd parallèles aux côtés de

Fig. 12.



l'angle donné, de sorte que $\widehat{aOc} = \widehat{AOC}$; ensuite le

diamètre ef parallèle à la droite donnée EF, on mène la corde ce, puis ag parallèle à ce; l'arc $ge =$ arc ac, donc $\widehat{eOg}$ est égal à l'angle donné; il reste à mener par p la parallèle à gh, pq qui est la droite cherchée.

En joignant ae à la place de ce et menant la parallèle par c, etc., on aurait la droite passant par p et faisant avec EF l'angle donné, mais dans l'autre sens.

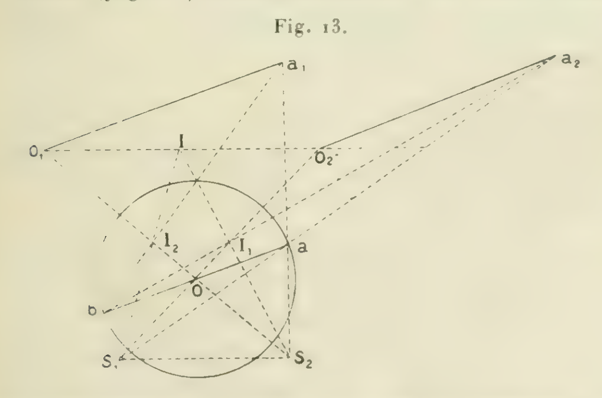
Problème V. — *Partager un angle en deux parties égales.*

Soit $\widehat{AOC}$ l'angle donné. Menons les diamètres ab, cd parallèles aux côtés de l'angle et joignons ad; l'angle $\widehat{dab}$ est égal à la moitié de l'angle $\widehat{bOd}$, c'est-à-dire la moitié de l'angle donné. La parallèle OI à ad est bissectrice de l'angle $\widehat{AOc}$.

Problème VI. — *Mener par un point donné un segment égal en grandeur et en direction à un segment donné.*

Soient (*fig.* 13) $O_1 a_1$ le segment, O_2 le point donné.

Fig. 13.



Tous les segments d'origine O_2 et de longueur $O_1 a_1$

ont leurs extrémités sur un cercle de rayon $O_1 a_1$ et de centre O_2.

Nous considérons donc les trois cercles suivants : le cercle O et les cercles de centres O_1, O_2 et de rayon $O_1 a_1$; nous déterminerons leurs centres de similitude qui nous permettront de résoudre le problème.

Soient S et I les centres de similitude externe et interne de $O_1 O_2$.

Soient S_1 et I_1 les centres de similitude externe et interne de OO_2.

Soient S_2 et I_2 les centres de similitude externe et interne de OO_1.

I est au milieu de $O_1 O_2$, S est à l'infini, par suite $S_1 S_2$ et $I_1 I_2$ sont parallèles à $O_1 O_2$. D'où la solution :

On mène OO_1, OO_2, $O_1 O_2$ et le diamètre ab parallèle à Oa_1.

On joint $a_1 a$, $a_1 b$ qui coupent OO_1 en S_2 et I_2; par S_2 on mène la parallèle à $O_1 O_2$, elle coupe OO_2 en S_1. $S_1 I_2$ coupe $O_1 O_2$ en I, IS_2 coupe OO_2 en I.

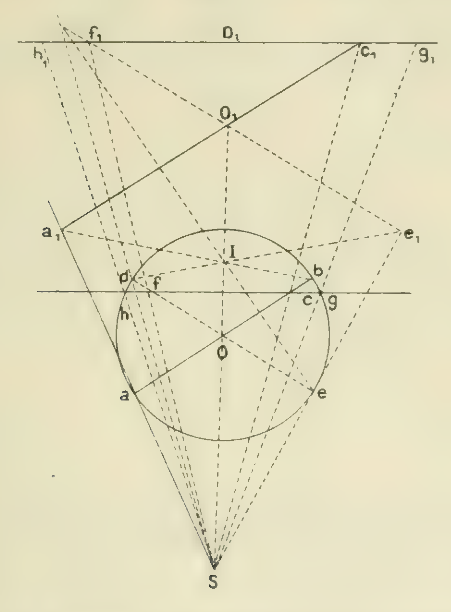
Ceci posé, soit ab un diamètre quelconque de O. $S_1 a$ et $I_1 b$ se coupent en a_2 qui appartient au cercle O_2, et en particulier si ab est parallèle à $O_1 a_1$ il en sera de même de $O_2 a_2$. Le problème est résolu.

Problème VII. — *Trouver les points d'intersection d'une droite donnée et d'un cercle donné en grandeur et en position (mais qui n'est pas tracé).*

Soient D_1 la droite donnée, O_1 et le centre $O_1 a_1$ le rayon du cercle donné. Déterminons les centres de similitude des deux cercles, en menant ab parallèle à $O_1 a_1$, joignant $a_1 b$ et $a_1 a$, soient S et I. Si l'on considère le point S comme centre d'homothétie, l'homologue de D_1, D, coupera le cercle O en deux points qui seront les

homothétiques des points cherchés. Soit c_1 le point où $O_1 a_1$ coupe D_1, la droite Sc_1 coupe ab en c homo-

Fig. 14.



logue de c_1. Menons un diamètre quelconque de ; Sd, Ie se coupent en d_1 ; Se, Id se coupent en e_1 ; $d_1 e_1$ est l'homothétique de de, elle coupe D_1 en f_1, Sf_1 coupe de en f, cf est l'homothétique de D_1, cette droite cf coupe le cercle O en g, h ; Sg, Sh coupent D_1 en g_1 et h_1 qui sont les points cherchés.

Si D ne coupe pas le cercle O, D_1 ne coupe pas O_1 et si D est tangent à O, D_1 est tangent à O_1.

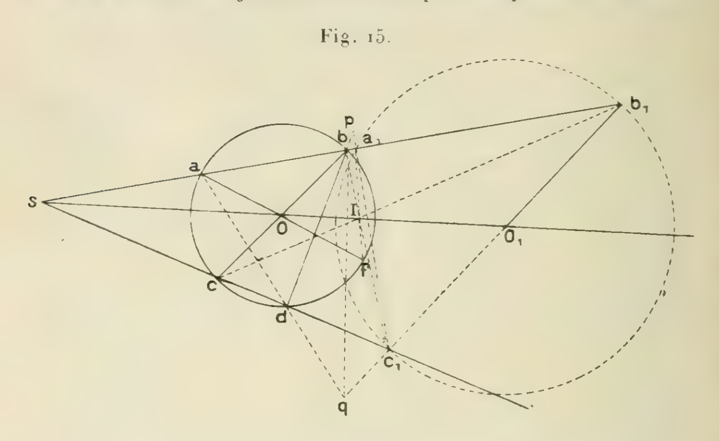
Si $O_1 a_1$ était parallèle à D_1, le point c_1 serait à l'infini ; on construirait un second point tel que f (et cela aussi si le point c_1 est trop éloigné).

Problème VIII. — *Trouver les points d'intersection de deux cercles donnés.*

Premier cas. — L'un des cercles est tracé : c'est le cercle O lui-même ; l'autre est donné par son centre O_1 et son rayon $O_1 b_1$.

On mène dans le cercle donné le diamètre bc parallèle à $O_1 b_1$; on joint $b_1 b$, $b_1 c$ qui coupent OO_1 aux

Fig. 15.



centres de similitude S et I des deux cercles ; soit a le deuxième point d'intersection de Sb et O ; on mène le diamètre af, fI coupe Sb_1 en a_1. Sc coupe le diamètre $O_1 b_1$ en c_1 et le cercle O en d ; ba_1 et $c_1 d$ sont deux couples de points antihomologues. $a_1 c_1$ et bd sont deux cordes antihomologues, elles se coupent en p sur l'axe radical ; de même ab_1, $c_1 d$ sont deux couples de points antihomologues, ad et $b_1 c_1$ se coupent en q qui appartient à l'axe radical, la droite pq coupe le cercle O aux deux points cherchés ; si pq ne coupe pas O, O et O_1 ne se coupent point ; si pq est tangent à O, O et O_1 sont tangents.

Deuxième cas. — Les deux cercles sont donnés par les rayons $O_1 a_1$, $O_2 c_2$.

On cherche l'axe radical de O et de O_1, celui de O

et de O_2; ils se coupent en I. De I on mène la perpendiculaire à O_1O_2 qui est l'axe radical de ces deux cercles, il n'y a plus qu'à déterminer les points d'intersection de cette droite avec O_1 par exemple.

Steiner indique aussi une autre solution de ce problème qui consiste à construire directement l'axe radical de O_1 et O_2 : pour cela il détermine d'abord les centres de similitude S_1I_1, S_2I_2 et ensuite les couples de points antihomologues de O_1 et de O_2.

A l'époque où Steiner écrivait son petit Livre, l'homothétie n'était guère enseignée, aussi lui consacre-t-il un Chapitre de son Ouvrage. Dans ce Chapitre il traite comme exercice du cercle des neuf points, et c'est lui, je crois, qui en parle pour la première fois.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1908). COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Solution par un ANONYME.

I. *Un triangle* ABC *étant donné, on considère trois cercles u, v, w, tangents respectivement aux droites* AB *et* AC, BC *et* BA, CA *et* CB, *et dont les centres sont situés sur les bissectrices des angles intérieurs du triangle; on demande de déterminer ces trois cercles de manière que les angles des cercles v et w, w et u, u et v soient respectivement égaux aux angles* extérieurs *en* A, B, C *du triangle* ABC. (*On entend ici par angle de deux cercles un angle égal à l'angle des rayons qui aboutissent en un point commun.*)

On prendra comme données les angles intérieurs du triangle ABC ($A > B > C$) *et le rayon* R *du cercle circonscrit, comme inconnues les rayons* u, v, w *des cercles cherchés, et l'on posera selon les cas :*

$$x = \pm\sqrt{u}, \quad y = \pm\sqrt{v}, \quad z = \pm\sqrt{w}.$$

Soient X *et* X', Y *et* Y', Z *et* Z' *les points de contact des droites* BC, CA, AB *avec les cercles* v *et* w, w *et* u, u *et* v *respectivement ; on distinguera deux cas selon que le nombre des vecteurs* XX', YY', ZZ' *dirigés* en sens contraire *des vecteurs* BC, CA, AB *est impair ou pair.*

Dans chacun des deux cas, les équations du problème étant

$$f(y, z) = 0, \quad g(z, x) = 0, \quad h(x, y) = 0,$$

les relations homogènes en x, y, z, *obtenues en combinant ces équations deux à deux, sont décomposables.*

Dans le second cas, qui donne lieu à une solution isolée et à un ensemble continu de solutions, on introduira, pour la solution isolée, le rayon r *du cercle inscrit au triangle* ABC.

II. *Pour la solution du premier cas, on calculera les longueurs* AZ, BX, CY. *On montrera que les axes radicaux des trois cercles* u, v, w, *considérés deux à deux, sont les droites* AD, BE, CF, *en désignant par* D, E, F *les points de contact avec* BC, CA, AB *des cercles exinscrits au triangle* ABC *et situés dans les angles* A, B, C. *On évaluera les distances* X, Y, Z *du centre radical* P *aux droites* BC, CA, AB *en fonction des hauteurs* h', h'', h''' *du triangle* ABC *et du rayon* r *du cercle inscrit ; on évaluera aussi les*

distances δ', δ'', δ''' *de ce point aux trois hauteurs du triangle en fonction des côtés* a, b, c.

On constatera qu'on peut écrire :

$$u = r' - r, \qquad v = r'' - r, \qquad w = r''' - r,$$

r', r'', r''' *étant les rayons des cercles exinscrits au triangle* ABC, *et l'on en déduira la position des centres* O', O'', O''' *des cercles* u, v, w *sur les bissectrices des angles du triangle; on évaluera la distance du point* O' *au côté* BC *en fonction des éléments* r, r', h', *et la distance du même point à la hauteur issue de* A *en fonction des éléments* b *et* c.

On conclura de ce qui précède que les trois cercles u, v, w *passent au point* P, *et que les tangentes en ce point sont parallèles aux trois côtés du triangle. On fera voir que ces cercles sont les transformés par inversion des droites* BC, CA, AB, *le pôle d'inversion étant le point* P, *la puissance d'inversion étant* $4r^2$.

I.

1. Les deux cercles v et w, par exemple, sont d'un même côté de la droite BC puisqu'ils se coupent, et il en est de même de leurs centres; le cercle v ne peut être dans l'angle opposé à l'angle B du triangle, car alors il en serait de même du cercle C, et ces cercles ne se couperaient pas; par suite BX est dans le sens BC, CX' est dans le sens CB. Si l'on considère un axe x portant le côté BC et orienté dans le sens BC, la relation segmentaire

$$\overline{BX} + \overline{XX'} + \overline{X'C} = \overline{BC}$$

donne la relation entre longueurs

$$BX - CX' \pm XX' = BC,$$

avec le signe — ou le signe + selon que XX′ est dans le sens contraire à BC (*fig.* 1), ou dans le sens BC (*fig.* 2).

A cause de

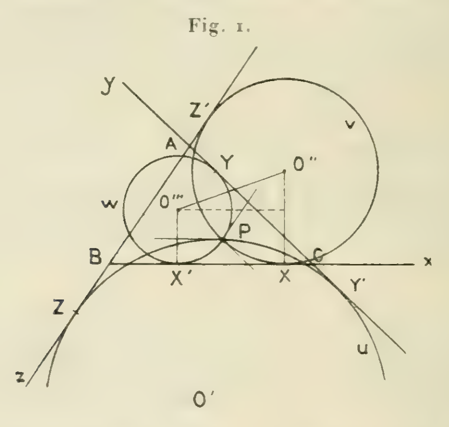
$$\overline{XX'}^2 = v^2 + w^2 + 2vw\cos A - (v - w)^2 = 4vw\cos^2\frac{A}{2},$$

on a donc

$$v\cot\frac{B}{2} - w\cot\frac{C}{2} \mp 2\sqrt{v}\sqrt{w}\cos\frac{A}{2} = 2R\sin A.$$

Considérons d'abord le cas où le nombre des vecteurs XX′, YY′, ZZ′ dirigés en sens contraire

Fig. 1.



de BC, CA, AB est impair. Si cela a lieu pour les trois vecteurs, comme sur la figure 1, nous poserons

$$x = -\sqrt{u}, \qquad y = \sqrt{v}, \qquad z = \sqrt{w},$$

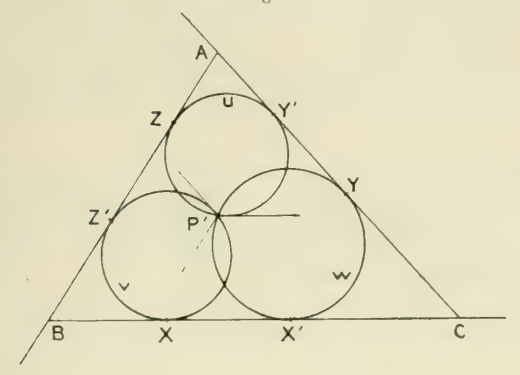
et nous aurons

$$(1)\quad \begin{cases} f = 0, & y^2\cot\dfrac{B}{2} - 2yz\cos\dfrac{A}{2} + z^2\cot\dfrac{C}{2} = 2R\sin A, \\ g = 0, & z^2\cot\dfrac{C}{2} - 2zx\cos\dfrac{B}{2} - x^2\cot\dfrac{A}{2} = 2R\sin B, \\ h = 0, & x^2\cot\dfrac{A}{2} - 2xy\cos\dfrac{C}{2} - y^2\cot\dfrac{B}{2} = 2R\sin C; \end{cases}$$

si XX′ est seul de sens contraire à BC, nous poserons

$$x = \sqrt{u}, \qquad y = \sqrt{v}, \qquad z = \sqrt{w},$$

Fig. 2.



et nous aurons les mêmes équations (en fait, ce cas ne se présentera pas).

2. Formons la combinaison homogène des équations $g = 0$, $h = 0$, en multipliant la première par $\frac{1}{2}\sin C$ ou $\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$, la seconde par $\frac{1}{2}\sin B$ ou $\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$, et en retranchant. La relation $h = 0$, multipliée par $\frac{1}{2}\sin B$, devient d'abord

$$y^2 \cos^2\frac{B}{2} - 2xy\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$+ x^2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\cot\frac{A}{2} = R\sin B\sin C$$

ou

$$\left(y\cos\frac{B}{2} - x\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)^2$$
$$-\frac{x^2\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\right) = R\sin B\sin C$$

ou, en remplaçant $\cos^2 \frac{C}{2}$ par $1 - \sin^2 \frac{C}{2}$,

$$\left(y \cos \frac{B}{2} - x \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}\right)^2 + \frac{x^2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \left(1 + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}\right) = R \sin B \sin C.$$

La relation $g = 0$ prend une forme analogue : il suffit de remplacer y par z, et d'échanger B et C, ce qui ne modifie pas le second terme du premier nombre. On a donc par soustraction

$$\left(y \cos \frac{B}{2} - x \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}\right)^2 - \left(z \cos \frac{C}{2} - x \sin \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2}\right)^2 = 0.$$

Cette relation se décompose, et l'on a

$$p = 0, \qquad y \cos \frac{B}{2} + z \cos \frac{C}{2} - x \cos \frac{A}{2} = 0$$

ou

$$p' = 0, \qquad y \cos \frac{B}{2} - z \cos \frac{C}{2} - x \sin \frac{B - C}{2} = 0.$$

On a de même, en combinant les équations $h = 0$, $f = 0$,

$$q = 0, \qquad z \cos \frac{C}{2} + x \cos \frac{A}{2} - y \cos \frac{B}{2} = 0$$

ou

$$q' = 0. \qquad z \cos \frac{C}{2} - x \cos \frac{A}{2} - y \sin \frac{C - A}{2} = 0.$$

3. Avec $p = 0$, $q = 0$, on a $z = 0$, ce qui donne

$$w = 0, \qquad u = b \operatorname{tang} \frac{A}{2}, \qquad v = a \operatorname{tang} \frac{B}{2};$$

le cercle w est un cercle-point C, le cercle u est tangent à AC en C et tangent à AB, le cercle v est tangent

à BC en C et tangent à BA. Les hypothèses $p=0$, $q'=0$ et $p'=0$, $q=0$ donnent des solutions analogues. Ces solutions sont sans intérêt.

La solution véritable s'obtient en prenant $p'=0$, $q'=0$; on a, par addition,

$$y\left(\sin\frac{A+C}{2}+\sin\frac{A-C}{2}\right)=x\left(\sin\frac{B+C}{2}+\sin\frac{B-C}{2}\right)$$

ou

$$y\sin\frac{A}{2}=x\sin\frac{B}{2};$$

on a donc

$$\frac{x}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{y}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{z}{\sin\frac{C}{2}}=\lambda.$$

Calculons λ par l'équation $f=0$; on a successivement

$$\lambda^2\left(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\right)=2R\sin A,$$

$$\lambda^2\left(\sin B+\sin C-4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\right)=4R\sin A,$$

$$\lambda^2\left(-\sin A+4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\right)=4R\sin A,$$

$$\lambda^2\left(-\sin A+4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}\right)=4R\sin A,$$

$$\lambda^2\sin A=4R\sin A,\qquad \lambda=2\sqrt{R},$$

car x, y, z, étant de même signe, sont tous trois positifs.

Ainsi XX', YY', ZZ' sont respectivement de sens contraires à BC, CA, AB, et l'on a

$$(1')\qquad \frac{u}{\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{v}{\sin^2\frac{B}{2}}=\frac{w}{\sin^2\frac{C}{2}}=4R;$$

c'est la solution représentée par la figure 1.

I (*suite*).

4. Considérons maintenant le cas où le nombre des vecteurs XX', YY', ZZ' dirigés dans le même sens que BC, CA, AB est impair. Si cela a lieu pour les trois vecteurs, comme sur la figure 2, nous poserons

$$x = \sqrt{u}, \qquad y = \sqrt{v}, \qquad z = \sqrt{w},$$

et nous aurons

$$(2) \begin{cases} f = 0, & y^2 \cot\frac{B}{2} + 2yz\cos\frac{A}{2} + z^2\cot\frac{C}{2} = 2R\sin A, \\ g = 0, & z^2 \cot\frac{C}{2} + 2zx\cos\frac{B}{2} + x^2\cot\frac{A}{2} = 2R\sin B, \\ h = 0, & x^2 \cot\frac{A}{2} + 2xy\cos\frac{C}{2} + y^2\cot\frac{B}{2} = 2R\sin C; \end{cases}$$

si XX' est seul du même sens que BC, comme cela a lieu dans la figure 3, nous poserons

$$x = -\sqrt{u}, \qquad y = \sqrt{v}, \qquad z = \sqrt{w},$$

et nous aurons les mêmes équations.

5. La combinaison homogène des équations $g = 0$, $h = 0$, est ici

$$\left(y\cos\frac{B}{2} + x\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)^2 - \left(z\cos\frac{C}{2} + x\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\right)^2 = 0.$$

Cette relation se décompose, et l'on a

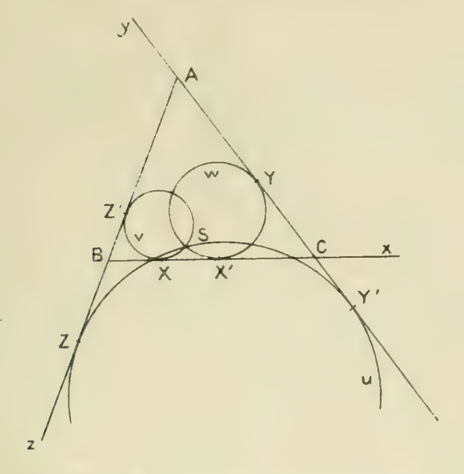
$$p = 0, \qquad x\cos\frac{A}{2} + y\cos\frac{B}{2} - z\cos\frac{C}{2} = 0$$

ou

$$p' = 0, \qquad y\cos\frac{B}{2} - z\cos\frac{C}{2} - x\sin\frac{B-C}{2} = 0;$$

la première de ces équations est symétrique en x, y,

Fig. 3.



z, A, B, C. On a de même, en combinant les équations $h = 0$, $f = 0$,

$$p = 0, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ou

$$q' = 0, \qquad z\cos\frac{C}{2} - x\cos\frac{A}{2} + y\sin\frac{C-A}{2} = 0.$$

6. On a donc *une solution isolée* en prenant $p' = 0$, $q' = 0$; cela donne par addition

$$y\left(\sin\frac{C+A}{2} + \sin\frac{C-A}{2}\right) = x\left(\sin\frac{C+B}{2} - \sin\frac{C-B}{2}\right)$$

ou

$$y\cos\frac{A}{2} = x\cos\frac{B}{2};$$

on a donc

$$\frac{x}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{y}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{z}{\cos\frac{C}{2}} = \lambda.$$

Calculons λ par l'équation $f = 0$ du système (2); on

a successivement, en remplaçant $\cos^2$ par $1 - \sin^2$,

$$\lambda^2 \left[\left(1 - \sin^2 \frac{B}{2}\right) \cot \frac{B}{2} + \left(1 - \sin^2 \frac{C}{2}\right) \cot \frac{C}{2} - 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \right] = 2 R \sin A.$$

$$\lambda^2 \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} - \frac{\sin B + \sin C}{2} + \frac{\sin A + \sin B - \sin C}{2} \right) = 2 R \sin A,$$

$$\lambda^2 \left(\frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} - \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \right) = 4 R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2},$$

$$\lambda^2 \left(1 - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) = 4 R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

A cause de

$$r = 4 R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},$$

on peut écrire

$$\lambda^2 = \frac{4 R r}{4 R + r}, \qquad \lambda = 2 \sqrt{\frac{R r}{4 R + r}},$$

car x, y, z, étant de même signe, sont tous trois positifs.

Ainsi dans cette solution isolée XX′, YY′, ZZ′ sont respectivement de même sens que BC, CA, AB, et l'on a

$$(2) \qquad \frac{u}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{v}{\cos^2 \frac{B}{2}} = \frac{w}{\cos^2 \frac{C}{2}} = \frac{4 R r}{4 R + r};$$

c'est la solution représentée par la figure 2.

7. Avec $p = 0$, les équations (2) se réduisent à deux seulement, $p = 0$, $f = 0$, ce qui donne des solutions en nombre infini. On peut transformer la relation $f = 0$ au moyen de la relation $p = 0$; cette dernière donne,

par élévation au carré,

$$y^2\cos^2\frac{B}{2} + z^2\cos^2\frac{C}{2} + 2yz\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = x^2\cos^2\frac{A}{2},$$

et si l'on élimine yz entre la relation $f = 0$ et celle-ci, au moyen des multiplicateurs $\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ et $-\cos\frac{A}{2}$, on obtient la relation symétrique

$$x^2\cos^2\frac{A}{2}\cot\frac{A}{2} + \ldots = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = p,$$

en appelant p le demi-périmètre du triangle. On a donc, pour les solutions qui forment un ensemble continu,

$$(2'')\quad \begin{cases} x\cos\frac{A}{2} + y\cos\frac{B}{2} + z\cos\frac{C}{2} = 0, \\ x^2\cos\frac{A}{2}\cot\frac{A}{2} + \ldots = p, \end{cases}$$

et l'on pourrait poser $x\cos\frac{A}{2} = \xi$, $y\cos\frac{B}{2} = \eta$, ... La première de ces relations montre que x, y, z ne peuvent être de même signe ; on aura par exemple XX' dans le sens BC, YY' dans le sens contraire à CA, ZZ' dans le sens contraire à AB (*fig.* 3).

On peut, sauf la question de réalité, se donner u à volonté. Si l'on élimine $y\cos\frac{B}{2}$ entre la relation (2''), on trouve la condition nécessaire et suffisante :

$$u = \frac{4Rr}{4R - r}.$$

II.

8. On a, pour la solution du premier cas (*fig.* 4),

$$u = 4R\sin^2\frac{A}{2}, \qquad v = 4R\sin^2\frac{B}{2}, \qquad \ldots$$

ou

$$u = a \operatorname{tang} \frac{A}{2}, \qquad v = b \operatorname{tang} \frac{B}{2}, \qquad \cdots;$$

on a donc

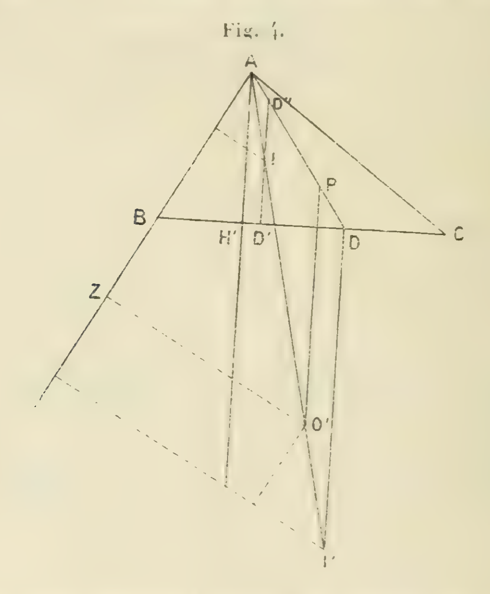
$$AZ = AY' = a, \qquad BX = BZ' = b, \qquad CY = CX' = c.$$

Considérons les cercles v et w. Le point A a même puissance par rapport à ces deux cercles, car on a

$$AZ' = BZ' - BA = b - c, \qquad AY = CA - CY = b - c;$$

le milieu D du segment XX' a aussi même puissance

Fig. 4.



par rapport à ces deux cercles, et comme on a pour ce point

$$BD - CD = BX - CX' = b - c.$$

D est le point de contact du cercle exinscrit au triangle ABC et situé dans l'angle A; l'axe radical des cercles V et W est donc bien la droite indiquée par l'énoncé.

Les droites AD, BE, CF concourent en un point P, centre radical des cercles u, v, w. A cause de $\mathrm{DB} = p - c$, $\mathrm{DC} = p - b$, le point P est le barycentre des points A, B, C, affectés des coefficients $p - a$, $p - b$, $p - c$; il est donc le barycentre des points A et D affectés des coefficients $p - a$, et a, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{\mathrm{AP}}{a} = \frac{\mathrm{PD}}{p - a} = \frac{\mathrm{AD}}{p}.$$

Sans nous astreindre, dans ce qui suit, à respecter strictement l'énoncé (ce qui serait d'ailleurs facile), nous remarquons que la distance du point P à la parallèle menée par A a pour valeur $h' \times \frac{a}{p}$ ou $2r$; de sorte que *le point* P *est le centre du cercle inscrit au triangle* A′B′C′ *circonscrit et parallèle au triangle* ABC.

Il résulte d'ailleurs de l'homothétie des cercles I et I′ que le point D″ de la figure appartient au cercle inscrit, de sorte qu'on a aussi $\mathrm{D'D''} = 2r$; on a donc $\overline{\mathrm{PD}} = \overline{\mathrm{AD''}}$.

9. La projection AZ du segment AO′ sur la droite AB étant égale à a, qui est aussi la projection de II′, on a

$$\overline{\mathrm{AO'}} = \overline{\mathrm{II'}} \quad \text{ou} \quad \overline{\mathrm{O'I'}} = \overline{\mathrm{AI}};$$

on a d'ailleurs en même temps $u = r' - r$.

Des égalités $\overline{\mathrm{PD}} = \overline{\mathrm{AD''}}$ et $\overline{\mathrm{O'I'}} = \overline{\mathrm{AI}}$, qui déterminent la position des points P et O′, il résulte que la droite O′P est perpendiculaire à BC; les distances des points P et O′ à la droite BC étant d'ailleurs

$$h - 2r \quad \text{et} \quad r' - (h' - r) \quad \text{ou} \quad r + r' - h',$$

on a

$$\mathrm{O'P} = r' - r = u;$$

le cercle u passe donc au point P, et la tangente en ce point est parallèle à BC. Ce résultat montre *comment* les angles des cercles v et w, w et u, u et v sont respectivement égaux aux angles extérieurs en A, B, C du triangle ABC.

Le cercle u est le transformé par inversion de la droite BC, le pôle d'inversion étant P. La puissance d'inversion est

$$P = \lambda \times 2u = 2(h' - 2r)(r' - r)$$
$$= 2[h'(r' - r) - 2rr' - 2r^2];$$

or, la projection des points I et I' sur la hauteur issue de A devient harmoniquement le segment AH', ce qui donne

$$\frac{2}{h'} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \frac{r' - r}{rr'}$$

ou

$$2rr' = h'(r' - r);$$

on a donc

$$P = 4r^2.$$

Le système des cercles u, v, w est transformé par inversion du système des droites BC, CA, AB; le cercle d'inversion est le cercle de centre P et de rayon $2r$ dont il a été question au n° 8.

III.

CONSIDÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES.

10. Soient D, E, F les points de contact avec BC, CA, AB des cercles α, β, γ exinscrits au triangle ABC et situés dans les angles A, B, C; soit P le point de concours des droites AD, BE, CF. Considérons le cercle homothétique du cercle α, le centre d'homothétie étant A, le rapport d'homothétie étant $\frac{AP}{AD}$: ce cercle passe au point P et la tangente en P est parallèle à BC;

en associant à ce cercle les deux cercles analogues fournis par les cercles β et γ, on obtient la solution du premier cas.

On voit aisément que le système des cercles u, v, w est transformé par inversion du système des droites BC, CA, AB, le pôle d'inversion étant P, la puissance d'inversion étant $4r^2$. Il en résulte que les deux triangles ABC et $O'O''O''$ sont polaires réciproques par rapport à un cercle de centre P et de rayon $r\sqrt{2}$: les droites PA, PB, PC sont donc perpendiculaires aux droites $O''O'''$, $O'''O'$, $O'O'''$, et sont par suite les axes radicaux des cercles u, v, w considérés deux à deux.

11. Soient D', E', F' les points de contact avec BC, CA, AB du cercle ω inscrit au triangle ABC : soit P' le point de concours des droites AD', BE', CF'. Considérons le cercle homothétique du cercle ω, le centre d'homothétie étant A, le rapport d'homothétie étant $\frac{AP'}{AD'}$: ce cercle passe au point P' et la tangente en P' est parallèle à BC ; en associant à ce cercle les deux cercles analogues, on obtient la solution isolée du second cas.

Ici encore le système des cercles u, v, w est transformé par inversion du système des droites BC, CA, AB, le pôle d'inversion étant P' ; les axes radicaux de ces cercles considérés deux à deux sont les droites $P'A$, $P'B$, $P'C$.

12. Les cercles de la figure 3, comme ceux des figures 1 et 2, ont un point commun. En effet, *dans toute solution du problème*, si S est un point commun aux trois sphères qui ont pour grands cercles les cercles u, v, w, on a

$$\widehat{O''SO'''} + \widehat{O'''SO'} + \widehat{O'SO''} = (2^{d} - A) + \ldots + (\ldots) = 4^{d}.$$

de sorte que le point S est un point du plan O′O″O‴.

Les cercles u, v, w de la figure 3 se déduisent d'ailleurs, par une rotation autour de S, de cercles obtenus en inversant les droites BC, CA, AB, le pôle d'inversion étant S, la puissance d'inversion ayant une valeur convenable.

Si X, Y, Z sont les distances du point S aux côtés du triangle ABC, on a

$$u\mathrm{X} = v\mathrm{Y} = w\mathrm{Z};$$

à cause de

$$\sqrt{u}\cos\frac{\mathrm{A}}{2} = \sqrt{v}\cos\frac{\mathrm{B}}{2} = \sqrt{w}\cos\frac{\mathrm{C}}{2},$$

on a donc

$$\frac{\cos\frac{\mathrm{A}}{2}}{\sqrt{\mathrm{X}}} = \frac{\cos\frac{\mathrm{B}}{2}}{\sqrt{\mathrm{Y}}} = \frac{\cos\frac{\mathrm{C}}{2}}{\sqrt{\mathrm{Z}}} = 0.$$

(Le lieu du point S est la quartique tricuspidale qui admet comme points de rebroussement les points A, B, C, et pour laquelle les tangentes de rebroussement concourent au point dont les coordonnées normales sont proportionnelles à $\cos^2\frac{\mathrm{A}}{2}$, $\cos^2\frac{\mathrm{B}}{2}$, ..., c'est-à-dire aux rayons des cercles u, v, w de la figure 2; ce point de concours est donc le point inverse du point P′ de la figure 2. Dans le cas d'un triangle équilatéral, la courbe lieu du point S est une hypocycloïde à trois rebroussements.)

IV.

13. Si x, y, z sont des axes portant les côtés du triangle et orientés de B vers C, de C vers A, de A vers B, et si l'on remplace les cercles u, v, w par des

cycles tangents à ces axes [1]. L'examen des figures 1, 2, 3 montre comment les divers cas qu'on a rencontrés se différencient. Avec les figures 1 et 2, on a

$$(v, w) = (y, z), \qquad (w, u) = (z, x), \qquad (u, v) = (x, y);$$

les tangentes au point commun sont de sens contraire à BC, CA, AB dans la figure 1, de même sens que BC, CA, AB dans la figure 2.

Avec la figure 3, on a

$$(v, w) = -(y, z),$$
$$(w, u) = \quad (z, x),$$
$$(u, v) = -(x, y);$$

l'indétermination se produit donc dans un cas nettement caractérisé.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1908).

Sujets des compositions.

Mathématiques spéciales.

Un contour convexe est formé des côtés parallèles AB, A′B′, de longueur $2l$, d'un rectangle ABB′A′ et des demi-cercles de rayon r décrits sur les deux autres côtés AA′ et BB′ comme diamètres. Il se déplace dans son plan d'une façon continue en restant tangent extérieurement à un demi-cercle fixe de rayon R et à la droite indéfinie D qui limite ce demi-cercle. On suppose que AB était sur D au début du mouvement et que A′B′

---

[1] La notion de *cycle* n'est pas au programme de l'Agrégation : c'est une lacune regrettable.

vient sur cette même droite à la fin du mouvement, après avoir touché le demi-cercle fixe.

1° Construire la trajectoire Γ du centre M du rectangle et reconnaître si elle est convexe;

2° Calculer l'aire limitée par Γ, dans l'hypothèse $R = r$, $l = r(\sqrt{3} - 1)$;

3° On suppose que l'angle dont tourne le contour est proportionnel au temps; on demande de placer le contour à un instant donné et de construire le vecteur vitesse du point M à cet instant ([1]).

4° Le côté A'B' étant tangent au demi-cercle fixe, trouver à un instant donné l'enveloppe des tangentes aux trajectoires des différents points du contour. Examiner les différents cas qui peuvent se présenter en supposant $R = r = l$.

Composition sur le Calcul différentiel et intégral.

I. On considère une famille F de courbes planes C représentées par l'équation générale

$$(C) \qquad f(x, y, \alpha) = 0,$$

où α est un paramètre variable.

On suppose la fonction f choisie de telle façon que les trois équations

$$(1) \qquad f = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 0$$

aient, pour chaque valeur déterminée de α, une solution commune (ξ, η).

Démontrer que, dans ces conditions :

Ou bien le point (ξ, η) est fixe, quel que soit α;

([1]) Les constructions 3° devront être effectuées avec la règle et le compas.

Ou bien la courbe C a, en ce point, un contact du second ordre avec son enveloppe.

Trouver la condition moyennant laquelle c'est la seconde de ces deux circonstances qui a lieu.

II. On considère, en particulier, le cas où les courbes C sont toutes homothétiques à une même courbe fixe C_0, représentée par l'équation $y = \varphi(x)$. Le centre d'homothétie est désigné par S, le rapport d'homothétie par k, l'homologue de l'origine O des coordonnées (c'est-à-dire le point placé par rapport à C comme O l'est par rapport à C_0) par O'; le point dont O est l'homologue (point placé par rapport à C_0 comme O l'est par rapport à C) par O_1.

On suppose que les coordonnées de S et le rapport k sont fonctions d'un même paramètre α. A quelles conditions doivent satisfaire ces fonctions pour que les courbes C aient chacune un contact du second ordre avec leur enveloppe?

Déterminer k en fonction de α de manière qu'il en soit ainsi :

1° Lorsqu'on donne C_0 et les expressions (en fonction de α) des coordonnées de S;

2° Lorsqu'on donne C_0 et les expressions des coordonnées de O'.

N. B. — Dans toutes les solutions précédentes, on s'attachera à interpréter géométriquement tout ce qui, parmi les résultats obtenus, sera susceptible d'une telle interprétation.

Sur quels résultats connus retombe-t-on en supposant que C_0 est un cercle?

III. Les courbes C étant toujours homothétiques d'une courbe fixe C_0, on suppose que les coordonnées du centre d'homothétie S et le rapport d'homothétie k sont développables en séries de Taylor autour de toute valeur réelle de α (k ne devenant, en outre, jamais nul) et que, de plus, k reprend la même valeur pour deux valeurs différentes α_1 et α_2 de α.

Montrer que si, dans ces conditions, les C ont chacune un contact du deuxième ordre avec leur enveloppe :

Ou bien pour une certaine valeur de α comprise entre α_1 et α_2, cette enveloppe a des branches infinies;

Ou bien le lieu des points O_1 définis plus haut a un point de rebroussement;

Ou bien cette dernière circonstance a lieu lorsqu'on remplace O par n'importe quel point fixe ω du plan autre que O (O_1 désignant alors le point qui est placé par rapport à C_0 comme ω l'est par rapport à C).

IV. Soit une famille de surfaces Σ représentées par l'équation générale

$$f(x, y, z, \alpha) = 0.$$

Si les équations $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 0$ représentent, pour chaque valeur de α, trois surfaces ayant une ligne commune :

Ou bien cette ligne est fixe;

Ou bien il y a, le long de cette ligne, contact du deuxième ordre entre l'enveloppée et l'enveloppe.

Condition pour que cette dernière circontance ait lieu. Cas où les surfaces Σ sont homothétiques à une surface fixe Σ_0. Montrer que celle-ci (ainsi que l'enveloppe) devra être développable. Que deviennent ici les solutions des deux problèmes posés dans la deuxième Partie?

V. On considère le cas où les courbes planes C sont non plus homothétiques, mais *égales* à une courbe fixe donnée C_0

$$y = \varphi(x).$$

Montrer qu'alors l'une des deux courbes dont le roulement l'une sur l'autre produit le mouvement de C doit être choisie d'une façon déterminée pour que C ait un contact du second ordre avec son enveloppe (l'autre courbe pouvant être quelconque).

Composition sur la Mécanique.

On considère dans un plan vertical deux droites indéfinies se coupant en un point O, l'une $x'Ox$ horizontale, l'autre $z'Oz$ verticale. Une tige AB homogène pesante d'épaisseur négligeable, de longueur $2l$ et de masse M est telle que ses extrémités restent constamment l'une A sur $x'Ox$, l'autre B sur $z'Oz$ et puissent passer sur ces droites d'un côté à l'autre du point O. Un point particulier D de la tige, dont les distances aux extrémités A et B restent invariable, est attiré par le point O proportionnellement à la distance; la valeur absolue de la force

qui le sollicite est représentée par $\frac{Mg}{l\lambda}$ OD, g désignant l'accélération de la pesanteur et λ un nombre positif inférieur l. On appelle C le milieu de la tige et a le segment CD compté positivement dans le sens CA; enfin, on désigne par θ l'angle que forme la droite OC avec la verticale descendante.

1° On suppose que les liaisons auxquelles est soumise la tige AB soient sans frottement; on demande de déterminer les positions d'équilibre de cette tige et de rechercher parmi ces positions celles pour lesquelles l'équilibre est stable.

2° On suppose plus généralement que les droites $x'Ox$, $z'Oz$ soient dépolies, et que les coefficients de frottement de la tige sur ces droites soient très petits. On demande de déterminer en fonction des données et de ces coefficients de frottement une valeur approchée des angles θ correspondant aux limites des régions dans lesquelles peut être placée la tige sans que l'équilibre cesse de subsister.

3° On suppose dans ce qui suit que les droites $x'Ox$, $z'Oz$ soient parfaitement polies; on demande d'étudier le mouvement de la tige et de discuter la nature de ce mouvement suivant la position du point D et suivant les données initiales.

4° On suppose comme cas particulier que l soit égal à la longueur du pendule simple battant la seconde, que λ soit égal à $\frac{l}{2}$, et a égal à l; à l'origine du temps, la tige est verticale, le point B étant au-dessous de O. On demande quelle vitesse initiale il faut donner à la tige pour qu'elle s'approche constamment, sans jamais l'atteindre, d'une de ses positions d'équilibre; dans ces conditions, quel temps mettra le point B pour parvenir au point O?

5° On suppose dans le cas général que la tige est placée dans le voisinage d'une de ses positions d'équilibre stable et qu'on l'abandonne ensuite sans vitesse initiale; on demande de déterminer la durée de ses oscillations, supposées infiniment petites, et d'examiner les divers cas qui peuvent se présenter.

VARIÉTÉS.

PRIX WOLFSKEHL.

En vertu des pouvoirs que nous a donnés M. le Dr Paul Wolfskehl, décédé à Darmstadt, nous fondons par les présentes un prix de 100000 marks sous le nom *Einhunderttausend Mark,* qui sera délivré à celui qui donnera le premier une démonstration du grand théorème de Fermat.

Dans son testament, M. le Dr Wolfskehl observe que Fermat (*Œuvres,* Paris, 1891, t. I, p. 291, observ. II) affirme *mutatis mutantis* que l'équation $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ n'a pas de solutions entières pour tous les exposants λ qui sont des nombres premiers impairs. Il y a lieu de démontrer ce théorème soit en général, suivant les idées de Fermat, soit en particulier, conformément aux recherches de Kummer (*Journal de Crelle,* t. 40, p. 130 et suiv.; *Abh. der Akad. d. Wiss.,* Berlin, 1857), pour tous les exposants λ pour lesquels il a, en somme, une valeur. Pour plus amples renseignements, consulter : HILBERT. *Théorie der Algebraischen Zahlkörper* (*Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung.* t. IV, 1894-1895. § 172-173. et *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften,* Bd. I, Teil. 2, *Arithmetik und Algebra.* 1900-1904, IC. 4 *b.* p. 713).

La fondation du prix a lieu sous les conditions suivantes :

La *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen* décidera en toute liberté à qui le prix doit être attribué. Elle refuse d'accepter tout *manuscrit* ayant pour objet de concourir à l'obtention du prix du théorème de Fermat; elle ne prendra en considération que les Mémoires mathématiques qui auront paru sous forme de monographie dans des journaux périodiques ou qui sont en vente sous forme de Volumes, en librairie. La Société prie les auteurs de pareils Mémoires de lui en adresser au moins cinq exemplaires imprimés.

Seront exclus du Concours les travaux qui seraient publiés dans une langue qui ne serait pas comprise des savants

spécialistes désignés pour le jugement. Les auteurs de pareils travaux pourront y substituer des traductions dont la fidélité sera certaine.

La Société décline toute responsabilité au sujet du non-examen de travaux dont elle n'aurait pas eu connaissance, ainsi que des erreurs qui pourraient résulter du fait que le véritable auteur du travail ou d'une partie du travail était inconnu de la Société.

Elle se réserve toute liberté de décision pour le cas où plusieurs personnes s'occuperaient de la solution de la question ou pour le cas où cette solution résulterait de travaux combinés de plusieurs savants, en particulier en ce qui concerne le partage du prix, à son gré.

L'attribution du prix par la Société aura lieu au plus tôt deux ans après la publication du Mémoire à couronner. Cet intervalle de temps a pour but de permettre aux mathématiciens allemands et étrangers d'émettre leur opinion au sujet de l'exactitude de la solution publiée.

Dès que le prix aura été attribué par la Société, le lauréat en sera informé par le Secrétaire au nom de la Société et le résultat sera publié partout où le prix aura été annoncé pendant la dernière année écoulée. L'attribution du prix par la Société est inattaquable.

Le payement du prix sera fait au lauréat dans l'intervalle des trois mois qui suivront son attribution par la caisse royale de l'Université de Göttingue ou aux risques et périls du destinataire en un autre endroit qu'il aura désigné.

Le capital pourra être versé contre quittance, au gré de la Société, soit en argent comptant, soit par simple transmission des valeurs financières qui le constituent. Le payement du prix sera donc considéré comme effectué par la transmission de ces valeurs, lors même que le total de leur valeur au cours du jour n'atteindrait plus 100000 marks.

Au cas où le prix n'aurait pas été délivré au 13 septembre 2007 aucune réclamation ultérieure ne serait plus admise.

Le Concours pour le prix Wolfskehl est ouvert à la date de ce jour aux conditions énoncées ci-dessus.

Göttingen, 27 juin 1908.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2067.

(1907, p. 96.)

Construire un quadrilatère inscrit dans un cercle donné, sachant que ce quadrilatère est circonscriptible à un cercle (d'ailleurs inconnu), et connaissant l'aire du quadrilatère ainsi que la longueur d'une de ses diagonales.

(W. MANTEL.)

SOLUTION

Par M. TÈTU.

Considérons le cercle circonscrit au quadrilatère. Plaçons la diagonale connue AB. Soient M et M' les deux autres sommets. Le quadrilatère MAM'B sera circonscriptible si

$$MA + M'B = MB + M'A$$

ou

$$MA - MB = M'A - M'B.$$

Les points M et M' sont donc sur une même branche d'une hyperbole de foyers A et B. Or, il est facile de voir que si l'on considère toutes les hyperboles de foyers A et B et qu'on prenne leur intersection avec le cercle fixe o, on a

$$\frac{MH}{M'H'} = \text{const.} = \frac{CP}{DP}.$$

Si, d'autre part, l'aire du quadrilatère est K^2, on a

$$MH + M'H' = \frac{2K^2}{AB},$$

d'où

$$MH = \frac{K^2}{R}\,\frac{CP}{AB}, \qquad M'H' = \frac{K^2}{R}\,\frac{DP}{AB}.$$

La condition de possibilité du problème est :

$$K^2 < R.AB,$$

et il n'y a qu'une solution.

Autres solutions par MM. BOUVAIST, VALÈRE MAES et PARROD.

[O¹5j]

SUR LES SURFACES DONT LES LIGNES ASYMPTOTIQUES SE DÉTERMINENT PAR QUADRATURES;

Par M. A. BUHL.

1. Le présent travail est le résumé de conférences faites, en 1908, à la Faculté des Sciences de Montpellier, pour les candidats à l'agrégation des Sciences mathématiques. J'y étudie des surfaces suffisamment générales pour pouvoir rassembler certains résultats épars concernant les lignes asymptotiques des conoïdes, des surfaces de révolution, d'hélicoïdes étudiés notamment par M. Painlevé, et même de surfaces spirales, à rattacher aux précédentes, dont les asymptotiques ne dépendent, comme on sait, que d'une quadrature.

Quoi qu'il en soit j'imagine que ce résumé pourra avoir quelque utilité pour tous les candidats à l'agrégation. Le programme relatif au concours de 1908, qui ne sera probablement pas modifié pour 1909, comprend, en ce qui concerne l'Analyse et ses applications géométriques, les équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre et l'étude des surfaces définies par les intégrales de telles équations. En respectant cet ordre d'idées je considérerai le problème suivant :

Déterminer les surfaces telles que le triangle O*mn* *formé par l'origine* O *et les intersections avec* O*xy* *de l'ordonnée et de la normale en* M(x, y, z) *ait une aire ne dépendant que de l'ordonnée* $z = $ M*m* *de* M.

Je me propose de former d'abord l'équation aux dérivées partielles de ces surfaces et de l'intégrer, ce qui est extrêmement simple, puis d'étudier les lignes asymptotiques des surfaces obtenues, ce qui l'est moins et donnera matière à d'intéressantes remarques. Le point m, projection de M sur Oxy, a évidemment pour coordonnées x et y. Le point n, intersection de la normale en M avec Oxy, a pour coordonnées $x+pz$ et $y+qz$, si bien que l'aire du triangle Omn est

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x+pz & y+qz & 1 \\ x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{z}{2}(py - qx).$$

Cette aire devant être fonction de la seule variable z, je poserai d'autre part

(1) $$A = -\frac{z}{2}\,\frac{a}{\Phi'(z)},$$

cette forme de A devant faciliter l'intégration. La constante a est introduite pour qu'on puisse facilement passer du cas général au cas de l'aire A nulle en faisant $a=0$. Dans ce cas, l'équation aux dérivées partielles est simplement $py - qx = 0$; c'est celle des surfaces de révolution. D'ailleurs ce résultat est évident géométriquement, car l'aire du triangle Omn ne peut être nulle que si Mn rencontre Om et, par suite, Oz; or les surfaces dont la normale rencontre toujours un axe fixe sont de révolution autour de cet axe. Nous voyons déjà que les surfaces de révolution sont des cas très particuliers des surfaces précédemment définies.

Revenant au cas général, on a l'équation aux dérivées partielles

$$py - qx = -\frac{a}{\Phi'(z)},$$

dont les équations des caractéristiques

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = -\frac{dz}{a}\Phi'(z)$$

admettent les intégrales

$$x^2 + y^2 = \text{const.}, \qquad a \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} = \Phi(z) + \text{const.}$$

On a donc pour intégrale générale

$$\Phi(z) = a \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} + \mathrm{F}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

F désignant une fonction arbitraire. En coordonnées semi-polaires on peut écrire plus simplement

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta, \\ \Phi(z) &= a\theta + \mathrm{F}(r). \end{aligned}\right.$$

On voit tout de suite les surfaces particulières contenues dans celles définies par ces dernières équations. Pour $a = 0$, on retombe sur les surfaces de révolution. Si $\mathrm{F}(r)$ disparaît on a les conoïdes ayant Oz pour directrice et Oxy pour plan directeur. Si $\Phi(z)$ se réduit à z on a des hélicoïdes étudiés par M. Painlevé dans le *Recueil d'exercices* de Tisserand (troisième Partie, 2e édition, problème n° 78).

Je vais me proposer, sans rien particulariser, de former l'équation différentielle des lignes asymptotiques des surfaces (2).

2. En coordonnées curvilignes r et θ, l'équation différentielle des asymptotiques de la surface (2) sera

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta\right)_2 & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \left(\frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta\right)_2 & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \left(\frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial \theta}d\theta\right)_2 & \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = 0.$$

La première colonne de ce déterminant contient des carrés symboliques qu'on développe d'une manière bien connue.

Les dérivations de z sont les seules qui offrent de légères complications. On a

$$\Phi'(z)\frac{\partial z}{\partial r} = F'(r), \qquad \Phi'(z)\frac{\partial z}{\partial \theta} = a,$$

$$\Phi'(z)\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \Phi''(z)\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = F''(r),$$

$$\Phi'(z)\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial \theta} + \Phi''(z)\frac{\partial z}{\partial r}\,\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0,$$

$$\Phi'(z)\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \Phi''(z)\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{F''(r)[\Phi'(z)]^2 - \Phi''(z)[F'(r)]^2}{[\Phi'(z)]^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial \theta} = -a F'(r)\frac{\Phi''(z)}{[\Phi'(z)]^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = -a^2\frac{\Phi''(z)}{[\Phi'(z)]^3}.$$

On trouve ensuite très facilement que les termes de la première colonne du déterminant précédent sont

$$-2\sin\theta\,dr\,d\theta - r\cos\theta\,d\theta^2,$$

$$2\cos\theta\,dr\,d\theta - r\sin\theta\,d\theta^2,$$

$$\frac{F''\Phi'^2 - \Phi''F'^2}{\Phi'^3}dr^2 - 2aF'\frac{\Phi''}{\Phi'^3}dr\,d\theta - a^2\frac{\Phi''}{\Phi'^3}d\theta^2.$$

La seconde et la troisième colonne sont respectivement

$$\begin{matrix} \cos\theta, & -r\sin\theta, \\ \sin\theta, & r\cos\theta, \\ \dfrac{F'}{\Phi'}, & \dfrac{a}{\Phi'}. \end{matrix}$$

Développant, on a

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(F'' - F'^2\frac{\Phi''}{\Phi'^2}\right)dr^2 \\ &\quad - 2a\left(\frac{1}{r} - F'\frac{\Phi''}{\Phi'^2}\right)dr\,d\theta + \left(rF' - a^2\frac{\Phi''}{\Phi'^2}\right)d\theta^2 = 0 \end{aligned} \right.$$

Cette équation ne devant contenir finalement que les variables r et θ, il faut tirer z de la dernière équation (2) et en porter la valeur dans $\frac{\Phi''}{\Phi'^2}$. En général, ce sera impossible tant qu'on n'attribuera pas à $\Phi(z)$ une forme particulière. Commençons par voir à quoi se réduit (3) dans des cas simples où l'on devra être d'accord avec des résultats connus.

3. *Conoïdes.* — Comme on l'a déjà remarqué, les équations (2) définissent un conoïde si la fonction $F(r)$ disparaît. Dans ce cas, (3) devient

$$\frac{2a}{r}\,dr\,d\theta + a^2\frac{\Phi''}{\Phi'^2}\,d\theta^2 = 0.$$

Si l'on supprime le facteur $d\theta$ qui correspond aux génératrices rectilignes et si l'on observe que $a\,d\theta = \Phi'\,dz$, il vient

$$2\frac{dr}{r} + \frac{\Phi''}{\Phi'}\,dz = 0,$$

d'où

$$r^2\,\Phi'(z) = \text{const.}$$

Cette équation détermine les asymptotiques du conoïde $a\theta = \Phi(z)$ en le coupant par des surfaces de révolution d'axe Oz. Elle est beaucoup plus symétrique que la forme habituellement donnée (*voir* encore le *Recueil* de Tisserand, 2e édition, troisième Partie, problème n° 59) et conduit naturellement à un curieux théorème. On peut l'écrire

$$r^2\frac{d\theta}{dz} = \text{const.}$$

et elle exprime alors que, *le point* M *décrivant une asymptotique sur le conoïde, le rayon vecteur* Om *balaye des aires dont la variation est proportion-*

nelle à celle de l'ordonnée mM. C'est quelque chose comme le théorème des aires où le temps serait remplacé par une variable purement géométrique.

Ceci devient particulièrement évident dans le cas de l'hélicoïde $z = a\theta$ dont les asymptotiques sont sur des cylindres de révolution d'axe Oz; le rayon Om balaye des secteurs de cercle dont les aires croissent proportionnellement à θ cependant qu'il en est de même de l'ordonnée $m\text{M} = z$.

4. *Surfaces de révolution.* — Si l'on fait $a = 0$ dans la dernière équation (2), on ne diminue pas la généralité en posant d'autre part $\Phi(z) = z$. Alors, d'après (3), les projections des asymptotiques de la surface $z = \text{F}(r)$ sont définies, dans le plan Oxy, par l'équation

$$\text{F}''\,dr^2 + r\text{F}'\,d\theta^2 = 0.$$

Dans beaucoup de cas on peut facilement effectuer la quadrature. Je cite au hasard les surfaces engendrées par une cycloïde tournant autour de sa tangente au sommet, par une chaînette tournant autour de sa base, par un cercle tournant autour d'une tangente, etc. Le tore général conduit à une quadrature elliptique. Le problème inverse, c'est-à-dire celui qui consiste à se donner une famille de courbes $d\theta = \varphi(r)\,dr$ et à déterminer les surfaces de révolution dont les asymptotiques se projettent suivant cette famille, se ramène à deux quadratures. Il faut alors déterminer $z = \text{F}(r)$ par l'équation linéaire

$$\text{F}'' - r[\varphi(r)]^2\,\text{F}' = 0,$$

d'où

$$\log \text{F}' = -\int r\varphi^2\,dr, \qquad z = \text{F}(r) = \int e^{-\int r\varphi^2\,dr}\,dr.$$

5. *Surfaces de M. Painlevé.* — Correspondant au cas où $\Phi(z) = z$ dans (2), on voit, d'après (1), que *ce sont des hélicoïdes où l'aire du triangle* O*mn est proportionnelle à l'ordonnée m*M. Pour définir les asymptotiques on déduit de (3)

$$F'' dr^2 - \frac{2a}{r} dr\, d\theta + r F' d\theta^2 = 0$$

ou

$$(4) \qquad \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 - \frac{2a}{r^2 F'} \left(\frac{d\theta}{dr}\right) + \frac{F''}{r F'} = 0.$$

On achève évidemment par une quadrature. Inversement, on peut se donner une famille de courbes $d\theta = \varphi(r)\, dr$ et chercher les surfaces du type précédent dont les asymptotiques *d'un système* se projettent sur la famille donnée. Le problème se résout par trois quadratures. En effet, F(r) est alors déterminé par l'équation

$$F'' + r[\varphi(r)]^2 F' = \frac{2a}{r} \varphi(r).$$

Prenant F′ pour fonction inconnue on a une équation linéaire qui s'intègre en général par deux quadratures; une troisième permettra de passer de F′ à F.

Mais observons bien qu'on a déterminé ainsi une surface

$$(5) \qquad z = a\theta + F(r)$$

dont un seul système d'asymptotiques se projette suivant les courbes $d\theta = \varphi(r) dr$; l'autre système aura pour équation différentielle

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{\varphi(r)} \frac{F''}{rF'} \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\theta}{dr} = \frac{2a}{r^2 F'} - \varphi(r),$$

parce que l'équation (4) doit avoir deux racines dont l'une est $\varphi(r)$ et l'autre un des deux seconds membres qu'on vient d'écrire.

6. M. Painlevé a montré directement que la surface (5) avait des asymptotiques déterminables par quadratures. Cela résulte du fait qu'elle est changée en elle-même par la transformation homographique

$$\theta = \theta_1 + \omega, \qquad z = z_1 + a\omega$$

qui doit conserver les asymptotiques $d\theta = \varphi(r, \theta)\,dr$. Donc φ ne dépend pas de θ.

Plus généralement la surface

$$z = a\theta + F(re^{-k\theta})$$

se change en elle-même par la transformation homographique

$$r = e^{k\omega} r_1, \qquad \theta = \theta_1 + \omega, \qquad z = z_1 + a\omega$$

qui doit conserver les asymptotiques $d\theta = \psi(\rho, \theta)\,d\rho$ si $\rho = re^{-k\theta}$.

Donc ψ ne dépend pas de θ.

J'ai cru devoir rappeler ces remarques que je vais étendre à de nouvelles surfaces.

7. *Surfaces spirales.* — Il reste évidemment encore une manière simple de rendre immédiatement indépendant de z le premier membre de (3). C'est de choisir la fonction Φ de telle manière que $\frac{\Phi''}{\Phi'^2}$ soit constant. On voit facilement qu'on peut prendre, sans diminuer la généralité,

$$\Phi(z) = \log(z - C), \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\Phi''}{\Phi'^2} = -1.$$

Donc, *les surfaces (du type spirale)*

(6) $$\log(z - C) = a\theta + F(r)$$

sont, d'après (1), *telles que l'aire* A *du triangle* O*mn varie proportionnellement à* $z(z + C)$. *En parti-*

culier A *varie proportionnellement au carré de l'ordonnée* $z = m\mathrm{M}$ *si* $\mathrm{C} = 0$.

Pour définir les asymptotiques, (3) donne

$$(\mathrm{F}'' + \mathrm{F}'^2)\,dr^2 - 2a\left(\frac{1}{r} - \mathrm{F}'\right)dr\,d\theta + (r\mathrm{F}' + a^2)\,d\theta^2 = 0,$$

ou

$$\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 - \frac{2a}{r}\,\frac{1 - r\mathrm{F}'}{a^2 + r\mathrm{F}'}\left(\frac{d\theta}{dr}\right) + \frac{\mathrm{F}'' + \mathrm{F}'^2}{a^2 - r\mathrm{F}'} = 0;$$

on est encore ramené aux quadratures.

Le problème inverse consistant à chercher les surfaces (6) dont les asymptotiques d'un système se projettent sur la famille donnée, $d\theta = \varphi(r)\,dr$, conduit à déterminer $\mathrm{F}(r)$ par l'équation

$$\frac{d\mathrm{F}'}{dr} + \mathrm{F}'^2 + (2a + r\varphi)\varphi\mathrm{F}' + a\varphi\left(a\varphi - \frac{2}{r}\right) = 0.$$

C'est, par rapport à F', une équation de Riccati. Si l'on peut l'intégrer, une quadrature supplémentaire donnera F. Alors, en raisonnant comme au n° 5, on voit que le second système d'asymptotiques correspond à l'équation différentielle

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{\varphi(r)}\,\frac{\mathrm{F}'' + \mathrm{F}'^2}{a^2 + r\mathrm{F}'} \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\theta}{dr} = \frac{2a}{r}\,\frac{1 - r\mathrm{F}'}{a^2 + r\mathrm{F}'} - \varphi(r).$$

8. Comme au n° 6, on remarquera que la surface (6) se change en elle-même par une transformation homographique qui est ici

$$\theta = \theta_1 + \omega, \qquad z + \mathrm{C} = e^{a\omega}(z_1 + \mathrm{C}).$$

On conclura de même que les asymptotiques sont déterminables par quadratures. Plus généralement, la surface

$$(7) \qquad \log(z + \mathrm{C}) = a\theta + \mathrm{F}(re^{-k\theta})$$

est changée en elle-même par la transformation homo-

graphique

$$r = e^{k\omega} r_1, \qquad \theta = \theta_1 + \omega, \qquad z + C = e^{a\omega}(z_1 + C),$$

ce qui entraîne encore un résultat analogue.

On voit qu'aux hélicoïdes on rattache facilement les surfaces (6) et (7) pour lesquelles les résultats précédents me semblent intéressants; j'en donnerai d'autres dans un second Mémoire que je pense publier dans ce même Recueil et où, au lieu de me servir surtout des variables r et θ, je me servirai de r et z ou de θ et z.

[K¹8b]

SUR UN POINT PARTICULIER DU QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE;

Par M. Auguste DETEUF,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Nous nous proposons de démontrer la propriété qui suit :

Il existe, dans tout quadrilatère inscriptible, un point où concourent 27 droites très particulières du quadrilatère.

Rappelons que, dans tout quadrilatère, inscriptible ou non, les droites joignant les milieux des diagonales, les milieux des côtés opposés, les quatre droites joignant chaque sommet au centre de gravité du triangle opposé, la droite joignant le point de rencontre des diagonales au centre de gravité du quadrilatère con-

courent en un point I. Nous appellerons ω le point nouveau que nous indiquons.

Soit O le centre du cercle circonscrit. Les 27 droites désignées sont :

1° La droite OI ;

2° Les six perpendiculaires abaissées du milieu d'un côté (ou d'une diagonale) sur le côté (ou la diagonale) opposé ;

3° Les quatre droites joignant un sommet à l'orthocentre du triangle opposé ;

4° Les six droites joignant les orthocentres des deux triangles formés par deux des sommets du quadrilatère et le point de rencontre de deux côtés (les diagonales étant considérées comme des côtés) ;

5° Les quatre droites de Simpson relatives à un des quatre triangles formés par trois sommets et au quatrième sommet ;

6° Les trois droites joignant les symétriques du centre par rapport aux milieux de deux côtés opposés ;

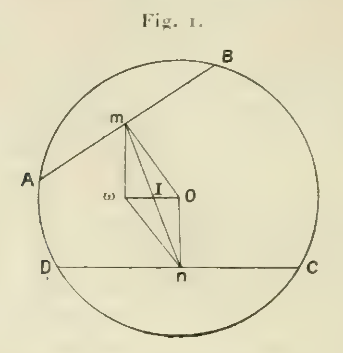
7° Les trois perpendiculaires abaissées du point de rencontre de deux côtés opposés, sur la droite qui joint les milieux de ces côtés.

En ce point passent également les quatre cercles des neuf points relatifs à chaque triangle formé par trois des sommets.

Démonstration. — 1°-2° Soient AB, CD (*fig.* 1) deux côtés opposés. Abaissons les perpendiculaires O*m*, O*n* sur ces côtés, et des milieux *m*, *n* abaissons les perpendiculaires *m*ω, *n*ω sur les côtés respectivement opposés. O*m*ω*n* est un parallélogramme. Oω coupe *mn* en son milieu. Mais le milieu de *mn* est le point I, défini plus haut. Donc ω est sur OI et symétrique de O par rapport à I. Cette propriété, indépendante

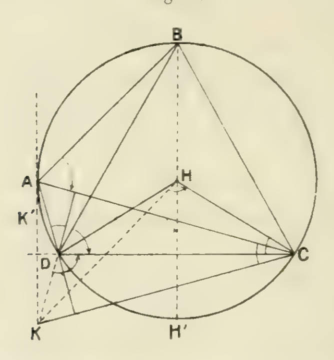
des côtés ou diagonales choisis, amène les six droites analogues à $m\omega$ à se couper (en ω).

Fig. 1.



3° Considérons les orthocentres H et K des triangles BCD, CDA (*fig.* 2). Le parallélisme de HK

Fig. 2.



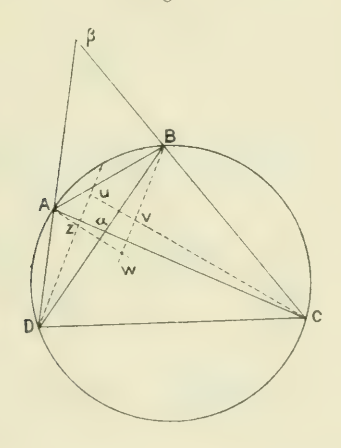
et AB se démontre facilement : les symétriques de H et K, par rapport à BC, sont, on le sait, sur la circonférence ; H'K' est donc symétrique de HK par rapport à CD ; de même H'K' est symétrique de AB par rapport à la perpendiculaire au milieu de BH', qui est parallèle à BC. AB et HK sont donc parallèles.

AKHB est ainsi un parallélogramme dont les dia-

gonales AH, BK se coupent en leur milieu. Mais H et K sont quelconques. Les quatre droites analogues concourent donc; le point de concours se trouve sur la parallèle à AK menée par le milieu de AB, puisque c'est le centre de ABHK. Cette parallèle est l'une des droites du 2°. Il se trouve de même sur toutes les autres. C'est le point ω.

4° Ces triangles sont par exemple ABα (*fig.* 3). Si nous prenons les quatre triangles intérieurs, leurs orthocentres u, v, w, z sont les sommets d'un parallélogramme : la figure le montre, uw, vz se coupent au

Fig. 3.



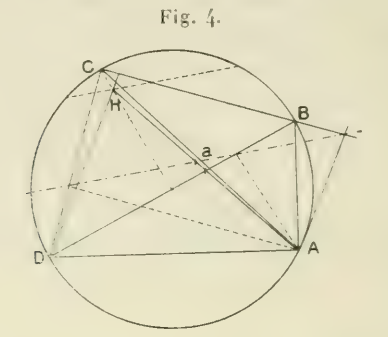
centre. Celui-ci s'obtient également en menant par le milieu de uv, ou ce qui revient au même de DB, la parallèle à Bv, puis par le milieu de vw (ou de AC) la parallèle à Cv. Ces droites sont les droites du 2°. Le centre est donc ω. Le même raisonnement s'applique aux triangles tels que ABβ, DCβ.

5° Soient un des sommets A et l'orthocentre H du triangle opposé; on sait que la droite de Simpson rela-

tive à ce triangle et à A passe par le milieu de AH, qui est précisément le point ω (3°).

6° Les droites joignant les milieux des côtés opposés

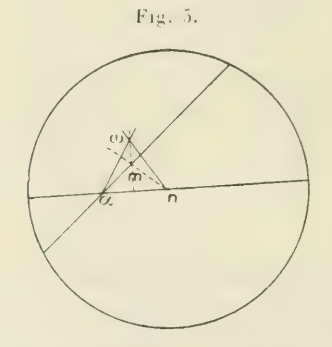
Fig. 4.



passent en I, les droites homothétiques dans le rapport 2 passent en ω (1°).

7° Soient *m*, *n* les milieux de deux côtés opposés, α leur point de rencontre (*fig.* 5). Les hauteurs du

Fig. 5.



triangle α*mn* concourent ; or deux de ces hauteurs sont des droites du 2° et la troisième une des droites du 7°. Celles-ci passent donc en ω.

Pour les cercles des neuf points, considérons l'un des triangles ABC, dont l'orthocentre est H; son

cercle des neuf points est homothétique du cercle circonscrit dans le rapport $\frac{1}{2}$. Le cercle circonscrit passe par le quatrième sommet D ; le cercle des neuf points passe donc par le milieu de HD, qui est ω.

On peut rattacher à cette propriété les quelques théorèmes suivants :

ω étant ainsi défini,
O étant le centre du cercle circonscrit,
α le point de rencontre des diagonales,
I le milieu de $O\omega$, on montre facilement que :

Théorème I. — *Les droites qui joignent les sommets du quadrilatère aux centres des cercles des neuf points des triangles opposés concourent en un point qui est $\frac{2}{3}$ de $O\omega$.*

Centres de gravité. Théorème II. — *Le centre de gravité d'un quadrilatère est sur αI au delà de I, à une distance égale à $\frac{1}{3}\alpha$I.*

Théorème III. — *Les centres de gravité de deux triangles opposés formés par un côté et le point de rencontre des deux diagonales sont en ligne droite avec un point qui est aux $\frac{2}{3}$ de αI. Il y a deux droites de cette sorte. Les droites joignant les centres de gravité de deux triangles formés par un même point de rencontre de deux côtés et deux autres côtés opposés passent au centre de gravité du triangle.*

On en déduit :

Théorème IV. — *Les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite.*

Orthocentres. Théorème V. — *Les orthocentres*

des quatre triangles définis par trois sommets d'un quadrilatère forment un quadrilatère identique au précédent et symétrique par rapport à ω.

Théorème VI. — *Les sommets du premier quadrilatère sont les orthocentres du second.*

Droites de Simpson. Théorème VII. — *Les quatre droites de Simpson sont coupées par les trois côtés du triangle qui correspond à chacune d'elles en deux segments égaux 4 à 4; les extrémités correspondantes de ces segments sont sur des cercles ayant pour centre* ω; *chaque quadrilatère est semblable à* ABCD.

Théorème VIII. — *On a la relation*

$$\overline{mn}^2 + \overline{O\omega}^2 = \overline{O\alpha}^2.$$

m et n étant les milieux de deux côtés opposés, et α *leur point de rencontre.*

Théorème IX. — *Tous les quadrilatères inscriptibles concentriques ayant mêmes diagonales ont même centre de gravité.*

Problème. — Construire un quadrilatère connaissant O, ω, α et R.

Théorème X. — *Les droites* $O\alpha$, $\omega\alpha$ *sont également inclinées sur les bissectrices des diagonales; le rapport* $\frac{O\alpha}{\omega\alpha} = \sin^2 V$, V *étant l'angle des diagonales; on peut remplacer* α *par le point de rencontre de deux côtés opposés.*

[A3d]

SUR LA RÈGLE DES SIGNES DE DESCARTES;

PAR M. J. JUHEL-RÉNOY.

Considérons le polynome

$$f(x) \equiv x^n \varphi(x) + h,$$

$\varphi(x)$ étant un polynome de degré $m - n$ de la forme

$$K + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

et construisons la courbe ayant pour équation

$$y = x^n \varphi(x),$$

en remarquant que, pour x assez petit et positif, y a le même signe que K.

Notons encore que $\varphi(x)$ et $f'(x)$ ont le même nombre de variations et que le nombre de ces variations est égal à celui de $f(x)$ ou à ce nombre diminué d'une unité suivant que K et h ont le même signe ou des signes contraires.

Pour démontrer le théorème de Descartes, il suffit de faire voir que, si on l'admet pour les équations de degré $m - 1$, il est vrai pour une équation de degré m: car, étant vérifié pour une équation du premier degré, il est vrai d'une manière générale.

Supposons donc, K étant, par exemple, positif, que $f'(x)$ ait p variations et, par conséquent, $(p - 2l)$ racines positives; y aura, au plus, pour $x > 0$ $(p - 2l)$ maxima ou minima; tous ces maxima peuvent être positifs, mais, K étant positif, il ne peut pas y en avoir plus de $(p - 2l - 1)$ négatifs.

Or, pour résoudre l'équation

$$f(x) = 0,$$

il suffit de couper la courbe

$$y = x^n \varphi(x)$$

par la parallèle à l'axe des x, dont l'équation est

$$y = -h.$$

Si donc h est positif, l'équation $f(x) = 0$ a, au plus, $p - 2l$ racines positives, et, si elle en a moins, la différence est un nombre pair.

Si h est négatif, l'équation $f(x) = 0$ a, au plus, $(p - 2l + 1)$ racines positives et, si elle en a moins, la différence est un nombre pair.

Le théorème de Descartes est ainsi démontré, car, dans le cas de h positif, l'équation $f(x) = 0$ a p variations, et elle en a $(p + 1)$ dans le cas de h négatif.

L'hypothèse de $K < 0$ donne lieu à un raisonnement identique.

[K¹10e]

SUR L'APPLICATION DES DÉTERMINANTS A LA GÉOMÉTRIE;

Par M. JUHEL-RÉNOY.

(SUITE.)

I. Considérons, sur un axe orienté, deux groupes de n points $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_n$ d'une part, et $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ de l'autre. On a, entre les distances mutuelles de chaque point d'un groupe aux n points de

l'autre, la relation

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} \overline{O_1A_1}^p & \overline{O_1A_2}^p & \dots & \overline{O_1A_n}^p & 1 \\ \overline{O_2A_1}^p & \overline{O_2A_2}^p & \dots & \overline{O_2A_n}^p & 1 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & . \\ \overline{O_nA_1}^p & \overline{O_nA_2}^p & \dots & \overline{O_nA_n}^p & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, la relation est, au plus, du degré $(p-1)$ par rapport à l'abscisse du point O_k, et elle est satisfaite pour $(n-1)$ positions du point O_k, puisque, quand le point O_k se confond avec le point O_i, le déterminant a deux lignes identiques. Si donc on a

$$n-1 \geqq p \qquad \text{ou} \qquad n \geqq p+1,$$

la relation est toujours vraie.

En particulier, si le point O_1 coïncide avec A_1, O_2 avec A_2, et ainsi de suite, on a une relation entre les distances mutuelles de n points d'un axe orienté :

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} 0 & \overline{A_1A_2}^p & \overline{A_1A_3}^p & \dots & \overline{A_1A_n}^p & 1 \\ \overline{A_2A_1}^p & 0 & \overline{A_2A_3}^p & \dots & \overline{A_2A_n}^p & 1 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & . \\ \overline{A_nA_1}^p & \overline{A_nA_2}^p & \overline{A_nA_3}^p & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour $p=1$ et $n=3$, cette relation devient

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} 0 & A_1A_2 & A_1A_3 & 1 \\ A_2A_1 & 0 & A_2A_3 & 1 \\ A_3A_1 & A_3A_2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'expression même du théorème de Chasles re-

latif aux distances mutuelles de trois points en ligne droite.

Il n'est pas inutile d'observer, comme je l'ai déjà fait remarquer pour la condition pour que quatre points soient sur un même cercle, que cette condition ne renferme que les distances mutuelles des trois points, tandis que la relation que l'on donne habituellement et dont la démonstration s'obtient par la multiplication des déterminants, quoique d'apparence absolument semblable, ne renferme que les *carrés* des distances respectives des trois points deux à deux.

II. Soient n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'un axe orienté et n points $O_1, O_2, \ldots, O_n$ de l'espace. Désignons par x_i l'abscisse du point A_i et par $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ les coordonnées du point O_k par rapport à un système d'axes rectangulaires ayant l'axe orienté pour axe des x; on a

$$\overline{O_k A_i}^2 = (x_i - \alpha_k)^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2,$$

c'est-à-dire que le carré de la distance d'un point de l'axe orienté à un point quelconque de l'espace est une fonction rationnelle, entière et du second degré de l'abscisse du point de l'axe orienté.

Il en résulte qu'on a, entre les distances mutuelles de chaque point de l'axe orienté aux n points de l'espace, la relation

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \overline{O_1 A_1}^{2p} & \overline{O_1 A_2}^{2p} & \ldots & \overline{O_1 A_n}^{2p} & 1 \\ \overline{O_2 A_1}^{2p} & \overline{O_2 A_2}^{2p} & \ldots & \overline{O_2 A_n}^{2p} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \overline{O_n A_1}^{2p} & \overline{O_n A_2}^{2p} & \ldots & \overline{O_n A_n}^{2p} & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, la relation est, au plus, du degré $(2p - 1)$

par rapport à l'abscisse du point A_i et elle est satisfaite pour $n-1$ positions du point A_i. Si donc on a

$$n \geqq 2p+1,$$

la relation est identique.

En particulier, si l'on suppose que les points de l'espace $O_2, O_3, \ldots, O_n$ se confondent respectivement avec les points $A_2, A_3, \ldots, A_n$ de l'axe orienté, on a une relation entre les distances d'un point O à n points d'un axe orienté :

$$(5)\quad \begin{vmatrix} \overline{OA_1}^{2p} & \overline{OA_2}^{2p} & \overline{OA_3}^{2p} & \ldots & \overline{OA_n}^{2p} & 1 \\ \overline{A_2A_1}^{2p} & 0 & \overline{A_2A_3}^{2p} & \ldots & \overline{A_2A_n}^{2p} & 1 \\ \overline{A_3A_1}^{2p} & \overline{A_3A_2}^{2p} & 0 & \ldots & \overline{A_3A_n}^{2p} & 1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & . \\ \overline{A_nA_1}^{2p} & \overline{A_nA_2}^{2p} & \overline{A_nA_3}^{2p} & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

égalité qui, dans le cas particulier de $p=1$ et $n=3$, donne le théorème de Stewart.

III. Nous avons démontré précédemment que, si l'on considère, sur un cercle orienté, deux groupes de n points $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_n$ d'une part et $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ de l'autre, on a, entre les distances mutuelles de chaque point d'un groupe aux n points de l'autre, la relation

$$(6)\quad \begin{vmatrix} \overline{O_1A_1}^{p} & \overline{O_1A_2}^{p} & \overline{O_1A_3}^{p} & \ldots & \overline{O_1A_n}^{p} \\ \overline{O_2A_1}^{p} & \overline{O_2A_2}^{p} & \overline{O_2A_3}^{p} & \ldots & \overline{O_2A_n}^{p} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \overline{O_nA_1}^{p} & \overline{O_nA_2}^{p} & \overline{O_nA_3}^{p} & \ldots & \overline{O_nA_n}^{p} \end{vmatrix} = 0,$$

avec la condition

$$n \geqq p + 2.$$

Cette relation est applicable à deux groupes de points d'un axe orienté. En effet, elle est, au plus, du degré p par rapport aux distances du point O_k aux n points A, et elle est satisfaite pour $(n - 1)$ positions du point O_k. Si donc on a

$$n - 1 \geqq p + 1,$$

la relation est toujours vraie.

En particulier, si le point O_1 coïncide avec A_1, O_2 avec A_2 et ainsi de suite, on a une relation entre les distances mutuelles de n points d'un axe orienté :

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} 0 & \overline{A_1A_2}^p & \overline{A_1A_3}^p & \cdots & \overline{A_1A_n}^p \\ \overline{A_2A_1}^p & 0 & \overline{A_2A_3}^p & \cdots & \overline{A_2A_n}^p \\ \overline{A_3A_1}^p & \overline{A_3A_2}^p & 0 & \cdots & \overline{A_3A_n}^p \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \overline{A_nA_1}^p & \overline{A_nA_2}^p & \overline{A_nA_3}^p & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans le cas où p est pair, la relation (6) s'applique à deux groupes de n points, l'un pris sur un axe orienté, l'autre disposé d'une manière quelconque dans l'espace.

Remarque. — Les relations (4) et (6) s'appliquent indistinctement à des points situés sur un axe ou sur un cercle orienté. Elles sont applicables également [la relation (6) seulement dans le cas où p est pair] à deux groupes de n points, l'un des groupes étant pris sur un axe ou un cercle orienté, l'autre disposé d'une manière quelconque dans l'espace.

Considérons, en particulier, dans le cas du cercle, les deux relations qu'on déduit des égalités (4) et (6)

en faisant coïncider les points A_i avec les points O_i respectivement ($i = 1, 2, 3, 4$) :

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &\begin{vmatrix} 0 & \overline{A_1A_2}^2 & \overline{A_1A_3}^2 & \overline{A_1A_4}^2 & 1 \\ \overline{A_2A_1}^2 & 0 & \overline{A_2A_3}^2 & \overline{A_2A_4}^2 & 1 \\ \overline{A_3A_1}^2 & \overline{A_3A_2}^2 & 0 & \overline{A_3A_4}^2 & 1 \\ \overline{A_4A_1}^2 & \overline{A_4A_2}^2 & \overline{A_4A_3}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \\ &\qquad\qquad \begin{vmatrix} 0 & A_1A_2 & A_1A_3 & A_1A_4 \\ A_2A_1 & 0 & A_2A_3 & A_2A_4 \\ A_3A_1 & A_3A_2 & 0 & A_3A_4 \\ A_4A_1 & A_4A_2 & A_4A_3 & 0 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \right.$$

La dernière exprime la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points, non situés en ligne droite, soient sur un même cercle. La première exprime uniquement une relation entre les distances mutuelles de quatre points d'un cercle. Elle n'est autre que la relation bien connue qui existe entre les distances deux à deux de quatre points d'un plan.

De même la relation que l'on déduit de la relation (4) en supposant $p = 1$ et $n = 5$, et qui est applicable à cinq points d'un axe ou d'un cercle orienté, est satisfaite par cinq points situés d'une manière quelconque dans l'espace, et, en particulier, sur une sphère.

Remarquons encore que la relation

$$(9)\quad \begin{vmatrix} 0 & \overline{A_1A_2}^2 & \overline{A_1A_3}^2 & \overline{A_1A_4}^2 & \overline{A_1A_5}^2 \\ \overline{A_2A_1}^2 & 0 & \overline{A_2A_3}^2 & \overline{A_2A_4}^2 & \overline{A_2A_5}^2 \\ \overline{A_3A_1}^2 & \overline{A_3A_2}^2 & 0 & \overline{A_3A_4}^2 & \overline{A_3A_5}^2 \\ \overline{A_4A_1}^2 & \overline{A_4A_2}^2 & \overline{A_4A_3}^2 & 0 & \overline{A_4A_5}^2 \\ \overline{A_5A_1}^2 & \overline{A_5A_2}^2 & \overline{A_5A_3}^2 & \overline{A_5A_4}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

relative à cinq points d'un axe ou d'un cercle, est applicable également à cinq points d'une sphère.

Remarque. — Si l'on transforme par inversion les relations (1) et (6) par rapport à un pôle distinct des points O et A, la relation (1) donne une relation de la forme (6) et la relation (6) une relation de même forme.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET AUX BOURSES DE LICENCE EN 1908.

Composition de Mathématiques (Sciences I et II).

PREMIÈRE QUESTION.

1° *Calculer la valeur de l'intégrale*

$$I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n},$$

où n désigne un entier positif.

2° *Calculer la valeur de l'intégrale*

$$I = \int_0^\infty \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{(1+x^2)^3}\,dx.$$

DEUXIÈME QUESTION.

1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$(1) \qquad y'' + a^2 y = \sin x,$$

où a désigne une constante positive, différente de un.

2° *Déterminer une intégrale particulière de l'équation précédente par la condition que cette intégrale et sa dérivée première s'annulent pour* $x = 0$.

3° *Rechercher ce que devient cette intégrale particulière lorsque* a *tend vers* un *et en déduire l'intégration de l'équation* (1) *dans le cas particulier où* $a = 1$.

TROISIÈME QUESTION.

On donne trois axes rectangulaires $Oxyz$ *et le parallélépipède rectangle* (P) *dont les six faces ont pour équations*

$$x = \pm 6, \qquad y = \pm 11, \qquad z = \pm 16.$$

Une sphère solide (S), *de rayon* 1, *se meut à l'intérieur de* (P). *Le mouvement du centre de* (S) *est rectiligne et uniforme tant que la surface de* (S) *ne vient pas en contact avec une face de* (P); *lorsqu'un tel contact se produit, la vitesse de ce centre conserve la même valeur absolue, mais sa direction se modifie suivant la loi physique de la réflexion, c'est-à-dire que la normale commune aux surfaces en contact est l'une des bissectrices de l'angle formé par les deux vitesses du centre, avant et après le contact.*

A l'époque $t = 0$, *le centre de* (S) *est l'origine des coordonnées. Les projections de sa vitesse sur les axes sont alors respectivement égales à* $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$.

On demande :

1° *Les coordonnées* x, y, z *de ce centre à l'époque* $t = 10$;

2° *La coordonnée* z *à l'époque* $t = 1000$.

On calculera les résultats à un centième près.

SOLUTION

Par JEAN SERVAIS.

PREMIÈRE QUESTION.

1° Le calcul de I_n est une question classique. On a

$$I_n = \int_0^\infty \frac{1 + x^2 - x^2}{(1 + x^2)^n}\,dx = I_{n-1} - \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(1 + x^2)^n}.$$

En intégrant par parties :

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(1 + x^2)^n} = -\int_0^\infty x\,d\left[\frac{1}{2(n-1)(1 + x^2)^{n-1}}\right]$$

$$= -\left[\frac{x}{2(n-1)(1 + x^2)^{n-1}}\right]_0^\infty$$

$$- \int_0^\infty \frac{dx}{2(n-1)(1 + x^2)^{n-1}} = \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}.$$

Par suite,

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1},$$

$$I_{n-1} = \frac{2n-5}{2n-4} I_{n-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$I_2 = \frac{1}{2} I_1,$$

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

On en conclut, par multiplication,

$$I_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\,\frac{\pi}{2}.$$

2° L'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{a x^3 + b x^2 + c x + d}{(1 + x^2)^3}\,dx$$

s'écrit

$$I = \int_0^\infty \frac{a x^2 - c}{(1 + x^2)^3} x \, dx + \int_0^\infty \frac{b x^2 + d}{(1 + x^2)^3} \, dx.$$

$$I = a \int_0^\infty \frac{x \, dx}{(1 + x^2)^2} - (c - a) \int_0^\infty \frac{x \, dx}{(1 + x^2)^3}$$

$$+ b \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x^2)^2} + (d - b) \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x^2)^3},$$

$$I = a \left[- \frac{1}{2(1 + x^2)} \right]_0^\infty - (c - a) \left[- \frac{1}{4(1 + x^2)^2} \right]_0^\infty$$

$$+ b I_2 + (d - b) I_3.$$

D'où, enfin,

$$I = \frac{c + a}{4} + \frac{b + 3d}{16} \pi.$$

DEUXIÈME QUESTION.

1° L'intégrale générale de l'équation

$$(1) \qquad y'' + a^2 y = \sin x$$

est, comme on sait, lorsque $a \neq 1$,

$$y = A \cos a x + B \sin a x + \frac{\sin x}{a^2 - 1};$$

sa dérivée est

$$y' = - A a \sin a x + B a \cos a x + \frac{\cos x}{a^2 - 1}.$$

2° Pour que y et y' s'annulent pour $x = 0$, il faut avoir

$$0 = A, \qquad 0 = B a + \frac{1}{a^2 - 1}$$

ou

$$B = - \frac{1}{a(a^2 - 1)}.$$

L'intégrale particulière qui s'annule ainsi que sa dérivée pour $x = 0$ est donc

$$y_1 = \frac{a \sin x - \sin a x}{a(a^2 - 1)}.$$

3° Lorsque a tend vers un, la limite de y_1 est donnée par la règle de l'Hospital :

$$y_1 = \frac{\sin x - x\cos x}{2}.$$

L'intégrale générale de l'équation (1) est alors, dans ce cas,

$$y = A\cos x + B'\sin x + \frac{1}{2}(\sin x - x\cos x)$$

ou, plus simplement,

$$y = A\cos x + B\sin x - \frac{1}{2}x\cos x,$$

A et B désignant des constantes arbitraires.

TROISIÈME QUESTION.

Tout se passe comme s'il s'agissait d'un point matériel se mouvant à l'intérieur du parallélépipède Q limité par les plans

$$x = \pm 5, \qquad y = \pm 10, \qquad z = \pm 15.$$

Les équations du mouvement initial sont

$$x = t, \qquad y = \sqrt{2}\,t, \qquad z = \sqrt{3}\,t.$$

Chaque fois que le point rencontre une des faces du parallélépipède (par exemple $x = 5$), une seule des projections de la vitesse change de signe et les autres ne changent pas (par exemple la projection sur Ox devient -1).

On peut donc étudier chacune des coordonnées séparément.

Le temps qui sépare deux chocs contre les plans $x = \pm 5$ est égal à leur distance 10, divisée par la vitesse suivant Ox ; c'est donc 10.

Le temps qui sépare deux chocs contre les plans $y = \pm 10$ est égal à

$$\frac{20}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2};$$

celui qui sépare deux chocs contre les plans $z = \pm 15$ est égal à

$$\frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}.$$

1° Au temps $t = 10$ il y a eu une réflexion sur chaque face :

Sur $x = 5$	au temps	$t = 5.$
Sur $y = 10$	»	$t = 5\sqrt{2}.$
Sur $z = 15$	»	$t = 5\sqrt{3}.$

Les coordonnées, au temps $t = 10$, sont donc

$$x = 5 - 5 = 0,$$
$$y = 10 - \sqrt{2}(10 - 5\sqrt{2}) = 20 - 10\sqrt{2},$$
$$z = 15 - \sqrt{3}(10 - 5\sqrt{3}) = 30 - 10\sqrt{3};$$

comme

$$\sqrt{2} = 1,414, \qquad \sqrt{3} = 1,73205,$$
$$x = 0, \qquad y = 5,86, \qquad z = 12,68.$$

2° Le premier choc sur le plan $z = 15$ a lieu à l'instant $5\sqrt{3}$; il y aura en outre, au temps $t = 1000$, autant de réflexions sur les plans $z = \pm 15$ que $10\sqrt{3}$ est contenu de fois dans $1000 - 5\sqrt{3}$.

La partie entière de

$$\frac{1000 - 5\sqrt{3}}{10\sqrt{3}} = \frac{100\sqrt{3}}{3} - 0,5 = 57,2$$

est 57.

Au temps $t = 1000$ le point a subi, par suite, 58 réflexions, la dernière ayant lieu sur le plan $z = -15$ et au temps $5\sqrt{3} + 570\sqrt{3} = 575\sqrt{3}$.

La valeur de z au temps $t = 1000$ est donc

$$z = -15 + \sqrt{3}(1000 - 575\sqrt{3}),$$

$$z = -1740 + 1000\sqrt{3} = -1740 + 1732,05,$$

$$z = -7,95.$$

Composition de Mathématiques (Sciences I).

PREMIÈRE QUESTION.

1° *On considère trois axes rectangulaires* $Oxyz$ *et, dans le plan* Oxy, *deux hyperboles* (H) *et* (H′) *et une droite* (D) *définies respectivement par les équations*

$$(\mathrm{H}) \left\{ \begin{array}{r} z = 0, \\ x^2 - y^2 = m^2, \end{array} \right. \qquad (\mathrm{H}') \left\{ \begin{array}{r} z = 0, \\ 2xy = n^2, \end{array} \right. \qquad (\mathrm{D}) \left\{ \begin{array}{r} z = 0, \\ 2x = p. \end{array} \right.$$

Soient M *et* M′ *deux points du plan* Oxy *satisfaisant aux trois conditions suivantes : ils sont conjugués par rapport à* (H) *et à* (H′); *le milieu de la droite qui les joint est situé sur* (D).

Montrer que M *décrit une courbe* (C) *et* M′ *une courbe* (C′) *qui coïncide avec* (C).

2° *On désigne par* $O_1x_1y_1z_1$ *un trièdre coïncidant avec le trièdre* $Oxyz$; *on suppose que ce trièdre peut se déplacer en entraînant avec lui la courbe* (C′); *on désigne par* (C_1) *et par* M_1 *les positions que prennent dans ce déplacement la courbe* (C′) *et le point* M′; *le trièdre* $Oxyz$ *reste fixe ainsi que la courbe* (C).

On supposera dorénavant que le trièdre mobile $O_1x_1y_1z_1$ *est toujours dans une position telle que l'angle des deux directions* Oz, O_1z_1 *soit égal à*

deux droits; dès lors, la position de ce trièdre est définie par les coordonnées a, b, c du sommet O_1, par rapport aux axes $Oxyz$, et l'angle φ des directions Ox, O_1x_1.

3° *On demande d'écrire les relations qui doivent exister entre a, b, c, φ pour que le trièdre $O_1x_1y_1z_1$ soit symétrique du trièdre $Oxyz$ par rapport à une droite du plan Oxy, étant entendu que O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 doivent être respectivement les symétriques de Ox, Oy, Oz. Une pareille position du trièdre $O_1x_1y_1z_1$ est définie si l'on se donne les valeurs a_0, b_0 des coordonnées a, b : on demande alors d'exprimer les coordonnées X, Y, Z du point M_1, par rapport aux axes $Oxyz$, en fonction des coordonnées du point M et de a_0, b_0.*

4° *On suppose que le trièdre $O_1x_1y_1z_1$ se déplace en partant de la position qu'on vient de définir, montrer qu'on peut faire varier a, b, c, φ de telle manière que, dans ce déplacement, la distance MM_1 d'un point quelconque M de la courbe (C) au point correspondant M_1 de la courbe (C_1) reste invariable.*

SECONDE QUESTION.

On considère trois axes rectangulaires et la surface ayant pour équation

$$z = \frac{y^3 - xy^2 - \lambda x^3}{y - x},$$

λ étant une constante.

Étudier la variation de la courbure à l'origine des sections de cette surface par les plans $y = mx$ lorsque le paramètre m varie.

On examinera particulièrement les cas suivants : 1° $\lambda = \frac{1}{3}$; 2° $\lambda = -\frac{1}{9}$.

SOLUTION

Par JEAN SERVAIS.

PREMIÈRE QUESTION.

1° Les relations qui lient les coordonnées x', y' du point M′ aux coordonnées x, y du point M sont

(1) $$xx' - yy' - m^2 = 0.$$

(2) $$xy' - yx' - n^2 = 0,$$

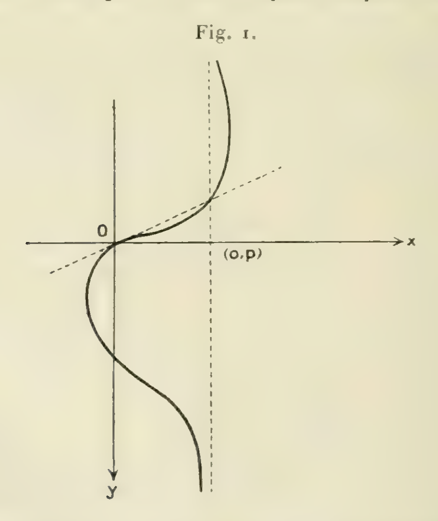
(3) $$x + x' - p = 0.$$

En éliminant x' et y' entre ces trois équations, on a l'équation de la courbe (C) :

$$(x^2 + y^2)(p - x) - m^2 x - n^2 y = 0.$$

C'est une cubique circulaire passant par l'origine des

Fig. 1.



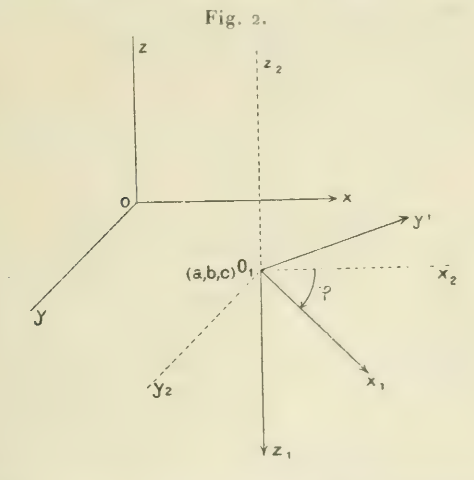
coordonnées, admettant la droite $x = p$ comme asymptote. Sa forme est indiquée dans la figure 1.

La symétrie des équations (1), (2), (3), qui ne chan-

gent pas quand on permute x avec x' et y avec y', montre que la courbe (C') est identique à (C).

2° Soit (*fig.* 2) $O_1x_2y_2z_2$ le trièdre $Oxyz$ trans-

Fig. 2.



porté parallèlement à lui-même de façon que son sommet soit en O_1.

Les angles des directions des axes du trièdre $O_1x_1y_1z_1$ avec les axes du trièdre $O_1x_2y_2z_2$ sont les mêmes que ceux que font les axes de $O_1x_1y_1z_1$ avec les axes de $Oxyz$. Ils sont donnés par le Tableau :

	O_1x_1.	O_1y_1.	O_1z_1.
Ox.	φ	$\varphi - \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
Oy.	$\varphi - \frac{\pi}{2}$	$\varphi - \pi$	$\frac{\pi}{2}$
Oz.	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Les formules de changement de coordonnées sont donc

$$(4)\qquad \begin{cases} x = a + x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi, \\ y = b + x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi, \\ z = c - z_1. \end{cases}$$

3° Soient

$$ux + vy + w = 0, \qquad z = 0$$

les équations d'une droite Δ du plan xOy.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de l'espace. Si ce point est supposé entraîné avec le trièdre $O_1x_1y_1z_1$, ses coordonnées par rapport à ce trièdre restent x, y, z et deviennent par rapport au trièdre $Oxyz$

$$\begin{aligned} X &= a + x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ Y &= b + x\sin\varphi + y\cos\varphi, \\ Z &= c - z, \end{aligned}$$

en vertu des formules (4).

Pour qu'il y ait symétrie par rapport à Δ il faut : 1° que le milieu $\dfrac{x+X}{2}$, $\dfrac{y+Y}{2}$, $\dfrac{z+Z}{2}$ des deux points soit sur Δ; 2° que la droite qui joint les deux points soit perpendiculaire à Δ.

Ce qui donne

$$u\frac{a + x\cos\varphi - y\sin\varphi + x}{2} + v\frac{b + x\sin\varphi + y\cos\varphi + y}{2} + w = 0,$$

$$\frac{c - z + z}{2} = 0,$$

$$(a + x\cos\varphi - y\sin\varphi - x)v - (b + x\sin\varphi + y\cos\varphi - y)u = 0,$$

relations qui doivent être vérifiées identiquement quels

que soient x, y et z. Ceci entraîne

$$
\begin{aligned}
c &= 0,\\
au - bv + 2w &= 0,\\
u(1 + \cos\varphi) + v\sin\varphi &= 0,\\
u\sin\varphi + v(1 - \cos\varphi) &= 0,\\
av - bu &= 0.
\end{aligned}
$$

Ces cinq relations se réduisent à quatre

$$
\begin{aligned}
c &= 0,\\
au - bv + 2w &= 0,\\
av - bu &= 0,\\
u\cos\frac{\varphi}{2} + v\sin\frac{\varphi}{2} &= 0,
\end{aligned}
$$

qui déterminent a, b, c, φ, connaissant l'équation de Δ.

On aurait pu trouver plus rapidement ces relations en écrivant que O et O_1 sont symétriques par rapport à Δ, et que Δ est la bissectrice de l'angle de Ox et O_1x_1.

Si l'on se donne les valeurs a_0 et b_0 de a et b, on a, pour déterminer φ,

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = -\frac{u}{v} = -\frac{a_0}{b_0}.$$

On en déduit

$$\cos\varphi = \frac{b_0^2 - a_0^2}{b_0^2 + a_0^2}, \qquad \sin\varphi = -\frac{2a_0b_0}{b_0^2 + a_0^2}.$$

Les coordonnées de M_1 par rapport au trièdre $O_1x_1y_1z_1$ sont

$$x_1 = x', \qquad y_1 = y', \qquad z_1 = 0.$$

On a donc, en vertu des formules (4),

$$
\begin{aligned}
X &= a_0 + x'\frac{b_0^2 - a_0^2}{b_0^2 + a_0^2} - y'\frac{2a_0b_0}{b_0^2 + a_0^2},\\
Y &= b_0 - x'\frac{2a_0b_0}{b_0^2 + a_0^2} - y'\frac{b_0^2 - a_0^2}{b_0^2 + a_0^2},\\
Z &= 0.
\end{aligned}
$$

Il suffirait de tirer x', y', z' en fonction de x, y, z de deux des équations (1), (2), (3) et de porter ces valeurs dans ces formules pour avoir X, Y, Z en fonction de a_0, b_0, x, y et z.

4° Lorsque le trièdre se déplace d'une façon arbitraire, l'angle de Oz et O_1z_1 restant toujours égal à π, les coordonnées de M_1 par rapport à $Oxyz$ sont

$$\begin{aligned} X &= a + x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \\ Y &= b - x' \sin\varphi - y' \cos\varphi, \\ Z &= c. \end{aligned}$$

Écrivons que le carré de la distance MM_1 a la même valeur pour la position initiale de $O_1x_1y_1z_1$ et pour une position quelconque; il vient

$$\begin{aligned} &(a + x' \cos\varphi + y' \sin\varphi - x)^2 + (b + x' \sin\varphi - y' \cos\varphi - y)^2 + c^2 \\ &= (a_0 + x' \cos\varphi_0 - y' \sin\varphi_0 - x)^2 + (b_0 + x' \sin\varphi_0 - y' \cos\varphi_0 - y)^2, \end{aligned}$$

avec

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi_0}{2} = -\frac{a_0}{b_0}.$$

Ceci donne, en développant et simplifiant,

$$\begin{aligned} &a^2 + b^2 - c^2 - 2ax - 2by + 2(ax' - by' - xx' - yy')\cos\varphi \\ &\quad + 2(ay' - bx' - xy' - yx')\sin\varphi \\ &= a_0^2 - b_0^2 - 2a_0x - 2b_0y - 2(a_0x' - b_0y' - xx' - yy')\cos\varphi_0 \\ &\quad - 2(a_0y' + b_0x' - xy' - yx')\sin\varphi_0. \end{aligned}$$

La relation (1) permet de remplacer $xx' - yy'$ par m^2, la relation (2) de remplacer $xy' - yx'$ par n^2; enfin, à cause de (3), remplaçons x par $p - x'$, et il vient

$$\begin{aligned} &a^2 + b^2 + c^2 - 2a(p - x') - 2by \\ &\quad + 2(ax' - by' - m^2)\cos\varphi - 2(ay' + bx' - n^2)\sin\varphi \\ &= a_0^2 - b_0^2 - 2a_0(p - x') - 2b_0y \\ &\quad - 2(a_0x' - b_0y' - n^2)\cos\varphi_0 - 2(a_0y' + b_0x' - n^2)\sin\varphi_0. \end{aligned}$$

Cette relation doit être une *identité* en x', y', y.

Si en effet le coefficient de y était différent de zéro, on pourrait exprimer y *linéairement* en x' et y' : ce qui n'est pas, en vertu des relations (1), (2) et (3). Le coefficient de y étant nul, la relation ne contient plus que x' et y' au *premier degré*. Ce doit donc être une identité, puisque le lieu du point $x'y'$ est, non pas une droite, mais une cubique (C'); on a ainsi les quatre relations

$$b = b_0,$$

$$2a(1+\cos\varphi) + 2b\sin\varphi = 0,$$

$$-2b\cos\varphi + 2a\sin\varphi = -2b_0,$$

$$a^2 + b^2 - 2ap - 2m^2\cos\varphi - 2n^2\sin\varphi$$
$$= a_0^2 - 2a_0p - 2m^2\frac{b_0^2-a_0^2}{b_0^2+a_0^2} - 4n^2\frac{a_0b_0}{b_0^2+a_0^2}.$$

La deuxième et la troisième se réduisent à une seule :

$$a\cos\frac{\varphi}{2} + b_0\sin\frac{\varphi}{2} = 0.$$

Il n'y a donc que trois relations entre les quatre paramètres a, b, c, φ. Ce sont

$$b = b_0, \qquad \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = -\frac{a}{b_0},$$

$$a^2 + c^2 - 2ap - 2m^2\frac{b_0^2-a^2}{b_0^2+a^2} + 4n^2\frac{b_0a}{b_0^2+a_0^2}$$
$$= a_0^2 - 2a_0p - 2m^2\frac{b_0^2-a_0^2}{b_0^2+a_0^2} + 4n^2\frac{b_0a_0}{b_0^2+a_0^2}.$$

La dernière résolue par rapport à c^2 donne

$$c^2 = (a_0 - a)\Bigg[a_0 + a - 2p + 4\,\frac{m^2b_0^2(a_0-a) + n^2b_0(b_0^2 - aa_0)}{(b_0^2+a_0^2)(b_0^2+a^2)}\Bigg].$$

Le sommet O_1 du trièdre $O_1x_1y_1z_1$ décrit donc une courbe plane du quatrième ordre située dans le plan

$$y = b_0$$

et qui a pour équation dans ce plan

$$z^2 = (a_0 - x)\left[a_0 + x - 2p - 4\,\frac{m^2 b_0^2 (a_0 - x) + n^2 b_0 (b_0^2 - a_0 x)}{(b_0^2 - a_0^2)(b_0^2 - x^2)}\right].$$

A chaque position de O_1 sur cette courbe correspond une valeur de φ donnée par l'équation

$$\tang \frac{\varphi}{2} = -\frac{a}{b_0},$$

qui prouve que la projection de $x_1 O_1 y_1$ sur Oxy est symétrique de xOy par rapport à une certaine droite Δ de ce plan.

SECONDE QUESTION.

La section de la surface par le plan

$$y = mx$$

se compose de l'axe Oz et d'une parabole dont la projection sur zOx a pour équation

$$z = \frac{m^3 - m^2 - \lambda}{m + 1}\, x^2.$$

Le plan xOy étant tangent à l'origine, le rayon de courbure est la limite du rapport

$$\frac{x^2 - y^2 - z^2}{2z} \quad \text{ou} \quad \frac{x^2 + y^2}{2z} \quad \text{ou} \quad \frac{(1 + m^2)x^2}{2z},$$

quand x et z tendent vers zéro. On a ainsi de suite

$$R = \frac{(1 + m^2)(1 - m)}{2(m^3 + m^2 + \lambda)}.$$

On en déduit

$$\frac{dR}{dm} = \frac{-2m^3 - (3\lambda - 4)m^2 - 2(\lambda - 1)m - \lambda}{2(m^3 - m^2 - \lambda)^2}.$$

1° Pour $\lambda = \frac{4}{3}$, on a

$$R = \frac{(1 - m^2)(1 + m)}{2\left(m^3 + m^2 - \frac{4}{3}\right)},$$

$$\frac{dR}{dm} = \frac{-m^3 + \frac{1}{3}m + \frac{2}{3}}{\left(m^3 + m^2 + \frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\left(m^2 - m - \frac{2}{3}\right)(1 - m)}{\left(m^3 - m^2 - \frac{4}{3}\right)^2}.$$

R s'annule pour $m = -1$ (le plan $x + y = 0$ coupe suivant la droite triple oz) et devient infini pour une valeur $-\alpha$ comprise entre $-\infty$ et -1.

Sa dérivée ne s'annule que pour $m = 1$: on a donc le Tableau de variation suivant :

m.	$\frac{dR}{dm}$.	R.
$-\infty$		$\frac{1}{2}$
	$+$	croît
$-\alpha$	...	$\frac{-\infty}{-\infty}$
	$+$	croît
-1	...	0
	$+$	croît
-1	0	$\frac{3}{2}$ (*max.*)
	$-$	décroît
$-\infty$		$\frac{1}{2}$

2° Pour $\lambda = -\frac{4}{9}$, on a

$$R = \frac{(1 + m^2)(1 - m)}{2\left(m^3 + m^2 - \frac{4}{9}\right)},$$

$$\frac{dR}{dm} = \frac{-m^3 - \frac{8}{3}m^2 - \frac{13}{9}m - \frac{2}{9}}{\left(m^3 + m^2 - \frac{4}{9}\right)^2},$$

ou

$$\frac{dR}{dm} = \frac{-(m-2)\left(m-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(m^3+m^2-\frac{4}{9}\right)^2};$$

R s'annule pour $m = -1$ et devient infini pour une valeur β positive.

On a donc le Tableau de variation suivant :

m.	$\frac{dR}{dm}$.	R.
$-\infty$		$\frac{1}{2}$
	$-$	croît
-2	0	$\frac{9}{16}$ (*max.*)
	$-$	décroît
-1	...	0
	$-$	décroît
$-\frac{1}{3}$	0	-1
	$-$	décroît
β	...	$\frac{-\infty}{-\infty}$
	$-$	décroît
$-\infty$		$\frac{1}{2}$

Cas général. — Il serait facile d'aborder maintenant le cas général. Le discriminant du numérateur de $\frac{dR}{dm}$ est

$$\Delta = 54\lambda^4 - 84\lambda^3 - 60\lambda^2 - 48\lambda,$$

dont nous connaissons d'avance une racine $\lambda = -\frac{4}{9}$; on a donc

$$\Delta = 6\lambda(9\lambda+4)(\lambda^2-2\lambda-2).$$

Lorsque λ est compris entre $-\frac{4}{9}$ et zéro, et dans ce

cas seulement, $\frac{dR}{dm}$ s'annule pour trois valeurs de λ.

D'autre part, le dénominateur de R n'a trois racines réelles que lorsque λ est compris entre $-\frac{4}{27}$ et zéro.

Il y aura donc quatre cas à examiner :

1° $\lambda \leqq -\frac{4}{9}$. Dans ce cas R devient infini pour une seule valeur de m qui est positive, et il passe par un maximum pour une valeur négative de m.

La variation est analogue à celle du second cas particulier.

2° $-\frac{4}{9} < \lambda \leqq -\frac{4}{27}$. R n'a toujours qu'un infini positif, mais $\frac{dR}{dm}$ s'annule pour trois valeurs *négatives* de m; il y a deux maxima et un minimum.

Pour $\lambda = -\frac{4}{27}$, R a, en plus, un infini double.

3° $-\frac{4}{27} < \lambda \leqq 0$. R devient infini pour trois valeurs réelles de m, deux négatives, une positive; $\frac{dR}{dm}$ s'annule pour trois valeurs négatives de m.

Pour $\lambda = 0$, on a

$$R = \frac{1 + m^2}{2m^2}.$$

La surface se réduit au plan $x + y = 0$ et au cylindre parabolique $z = y^2$.

4° $\lambda > 0$. R est infini pour une valeur négative de m et $\frac{dR}{dm}$ s'annule pour une valeur positive de m.

La variation est du type de celle du premier cas particulier.

CORRESPONDANCE.

M. P. Sondat. — Soit P un point du cercle ABC de centre O. Le lieu des centres des coniques *u* circonscrites au quadrangle PABC est la conique *v* qui passe par les milieux I, H, K des côtés BC, CA, AB du triangle ABC, par les milieux I_1, H_1, K_1 des droites PA, PB, PC et aussi par le point O, puisque le cercle O est l'une des coniques *u*. Cette conique *v* a pour centre le point de rencontre ε des cordes II_1, HH_1, KK_1, qui se coupent en parties égales. Or O est l'orthocentre du triangle IHK. Donc le point ε doit appartenir au cercle d'Euler E du triangle IHK, qui est le lieu des centres des coniques circonscrites au quadrangle OIHK. Il en résulte que, quand P décrit le cercle O, le point ε doit décrire le cercle *fixe* E.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1955.

(1903, p. 47.)

Étant donnés deux droites fixes rectangulaires Ox, Oy *et un cercle* C *qui passe en* O, *l'enveloppe des droites dont les segments limités à* Ox, Oy *ont leur milieu sur le cercle est une hypocycloïde triangulaire* H_3.

Montrer géométriquement que l'enveloppe de cette courbe H_3, *quand le cercle* C *de rayon constant tourne autour du point* O, *est une hypocycloïde quadrangulaire* H_4.

(R. Gilbert.)

SOLUTION

Par M. R. GILBERT.

Soit AB une droite dont le milieu M est sur C; si P est le point de OM tel que OP = 2OM, le lieu du point P est un cercle de centre D diamétralement opposé au point O sur le cercle C. D'ailleurs, si E_1 F sont les points où Ox, Oy coupent C', AB est la droite de Simpson du point P par rapport au triangle OEF. Donc AB enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements, H_3; le cercle inscrit à cette courbe est le cercle des neuf points du triangle OEF, c'est-à-dire le cercle C.

Désignons par G le point où la droite OD coupe à nouveau le cercle C' et GK la perpendiculaire abaissée sur EF.

La droite EF est une des positions de AB; le point K est le point où elle touche H_3. En effet, considérons une droite AB infiniment voisine de EF; comme AB est la droite de Simpson du point P, si PQ est la perpendiculaire abaissée de P sur EF, Q est le point de rencontre de AB et EF. Donc, quand AB tend vers EF, Q tend vers le point de contact de EF avec son enveloppe, et, d'autre part, il coïncide avec le pied K de la perpendiculaire GK à EF.

On verrait de la même façon que la courbe H_3 est tangente à Ox, Oy en E_1, F. Si maintenant le cercle C de rayon constant se meut en passant constamment en O, la courbe H_3 de grandeur invariable étant tangente à Ox, Oy en E, F, le centre instantané de rotation est le point G. Mais le segment EF de longueur constante est aussi une figure invariable, et, dans le mouvement de cette figure, le centre instantané de rotation est aussi le point G; la droite EF enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements, H_4, à laquelle elle est tangente en K. Ainsi H_3 et H_4 sont tangentes en ce point; comme d'ailleurs les autres normales menées de G à H_3 sont GE, GF, la courbe H_4 est, avec Ox, Oy, l'enveloppe de H_3.

Remarque. — On peut résoudre de même le problème plus général suivant : *Trouver l'enveloppe d'une hypocycloïde à trois rebroussements de grandeur constante tangente à deux droites fixes quelconques* Ox, Oy.

Soient en effet S, T les points de contact sur Ox, Oy; S'

le point de rencontre des perpendiculaires SS′ à Ox et OS′ à Oy : T′ le point de rencontre des perpendiculaires TT′ à Oy et OT′ à Ox. Le cercle C″, circonscrit au triangle OS′T′, coupe Ox, Oy en E, F.

L'hypocycloïde à trois rebroussements est l'enveloppe des droites de Simpson du triangle OEF ; son cercle inscrit est le cercle des neuf points de ce triangle ; il s'ensuit que le cercle C′ est de grandeur constante, et par suite aussi le segment EF.

D'autre part, dans le mouvement de l'hypocycloïde, le centre instantané de rotation est le point de rencontre G de SS′, TT′ ; dans le mouvement de la figure invariable EF, le centre instantané est le point G′ diamétralement opposé à O sur le cercle C′ ; ces deux points sont sur une même perpendiculaire GKG′ à EF, car GG′ est une hauteur du triangle G′S′T′. Donc l'enveloppe de l'hypocycloïde est la courbe enveloppe des droites EF.

2049.

(1906, p. 480.)

On joint un point O *aux points* I, H, K *où une sécante* X *coupe les côtés* BC, CA, AB *d'un triangle* ABC, *et dans le faisceau* O *on inscrit un triangle quelconque* $A_1B_1C_1$ *dont les côtés* B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 *rencontrent la sécante en* I_1, H_1, K_1.

I. *Les droites* AI_1, BH_1, CK_1 *sont concourantes en un point* O_1.

II. *Si les droites* AO, BO, CO *coupent les côtés correspondants de* $A_1B_1C_1$ *en* P_1, Q_1, R_1 *et si les droites* A_1O_1, B_1O_1, C_1O_1 *coupent les côtés de* ABC *en* P, Q, R, *les six points* P, Q, R, P_1, Q_1, R_1 *sont situés sur une droite* X_1, *et les droites* X, X_1, OO_1 *sont concourantes.*

(P. Sondat.)

SOLUTION

Par l'auteur.

I. La sécante X coupe les côtés de ABC et les droites joignant le point O à ses sommets en six points I_1, H_1, K_1 et I, H, K en involution.

En considérant la droite X comme sécante dans le

triangle ABC, il résulte de cette involution que les droites AI_1, BH_1, CK_1 doivent être concourantes en un point O_1.

II. Les droites qui joignent le point O aux sommets de ABC et aux points I, H, K où les côtés sont coupés par X forment un faisceau en involution. Or trois des rayons de ce faisceau passent par les sommets de $A_1 B_1 C_1$ et, par suite, les rayons associés doivent couper les côtés en trois points P_1, Q_1, R_1 en ligne droite.

Les droites qui joignent O_1 aux sommets de $A_1 B_1 C_1$ et aux points I_1, H_1, K_1 où les côtés sont coupés par X forment aussi un faisceau en involution. Or trois des rayons passent par les sommets de ABC et, par suite, les trois autres doivent couper les côtés de ABC en trois points P, Q, R en ligne droite.

Appelant ϖ le point (X, OO_1), il résulte des pascales

$$A I_1 H B_1 Q P_1,$$
$$A I_1 K C_1 R P_1$$

que les droites $P_1 Q$ et $P_1 R$ passent par ϖ. Les quatre points P_1, Q, R, ϖ sont donc alignés et, comme P appartient à QR, on a la droite

(1) $$P P_1 Q R \varpi.$$

Il résulte des pascales

$$A_1 I H_1 B Q_1 P,$$
$$A_1 I K_1 C R_1 P$$

que les droites PQ_1, PR_1 passent par ϖ. Les quatre points P, Q_1, R_1, ϖ sont donc alignés, et, comme P_1 appartient à $Q_1 R_1$, on a la droite

(2) $$P P_1 Q_1 R_1 \varpi.$$

D'ailleurs les droites (1) et (2), qui ont trois points communs, se superposent.

Remarque. — Si les côtés de $A_1 B_1 C_1$ sont perpendiculaires à ceux de ABC, en prenant pour O l'orthocentre de $A_1 B_1 C_1$, X passant à l'infini, O_1 sera l'orthocentre de ABC, et les droites X_1 et OO_1 seront parallèles.

QUESTIONS.

2099. Si l'on considère les trois équations

$$(1) \qquad \frac{a}{b-x} - \frac{b}{x-a} - \frac{x}{a-b} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{a}{(b-x)^2} - \frac{b}{(x-a)^2} - \frac{x}{(a-b)^2} = 0,$$

$$(3) \qquad \sqrt[4]{x-a} + \sqrt[4]{b-x} = \sqrt[4]{b-a},$$

l'équation (2) du cinquième degré contient les trois racines de l'équation (1).

Les deux autres racines de (2) sont racines doubles de l'équation (3) qui a six racines. (E.-N. Barisien.)

2100. Si a et b sont les racines de l'équation

$$x^2 - 7x + 7^3 = 0,$$

les deux quantités

$$-2(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) - (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}),$$

$$-(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) - (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2})$$

sont égales à celles-ci,

$$3(\varepsilon\sqrt[3]{a} - \varepsilon^2\sqrt[3]{b}), \quad 3(\varepsilon^2\sqrt[3]{a} - \varepsilon\sqrt[3]{b}),$$

ε et ε^2 étant les racines cubiques imaginaires de l'unité. Préciser ε. G. F.

(D'après Hermite. *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique.*)

2101. La quintique gauche qui est l'intersection partielle d'une quadrique et d'une surface de troisième ordre ayant une droite commune dépend de 20 paramètres. G. F.

2102. On considère un limaçon de Pascal et les cercles bitangents n'ayant pas leurs centres sur l'axe de symétrie :

1° La corde des contacts passe par un point fixe;

2° Enveloppe de la polaire de ce point par rapport à un cercle bitangent;

3° Lieu du pôle de la corde des contacts par rapport à un cercle bitangent;

4° Lieu du milieu de cette corde;

5° Lieu du conjugué harmonique de P par rapport aux points de contact du cercle avec le limaçon. (M. Tétu.)

2103. Étant données 4 sphères C_1, C_2, C_3, C_4 de centres O_1, O_2, O_3, O_4, une sphère quelconque Σ coupe les axes radicaux IA_1, IA_2, IA_3, IA_4 de ces sphères prises 3 à 3 en A_1 et A'_1, A_2 et A'_2, A_3 et A'_3, A_4 et A'_4. Les 4 points A_1, A_2, A_3, A_4 sont les centres radicaux de C_1, C_2, C_3, C_4 prises 3 à 3 avec une sphère S. De même A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 sont les centres radicaux de C_1, C_2, C_3, C_4 prises 3 à 3 avec une sphère S'.

1° Montrer que S et S' peuvent se déduire l'une de l'autre de la façon suivante : leurs centres ω, ω' sont deux points inverses par rapport au tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$ et la somme des puissances du point I par rapport à ces deux sphères reste constante quand Σ varie.

2° Montrer qu'il y a une surface lieu des points ω, ω' tels que S et S' soient orthogonales quel que soit le rayon arbitraire attribué à l'une d'elles, et étudier cette surface.

(R. Gilbert.)

2104. Étant donnée une ellipse de demi-axes R et 2R, le cercle ayant pour diamètre une demi-corde parallèle au grand axe enveloppe une épicycloïde à deux rebroussements.

(E.-N. Barisien.)

2105. Les tangentes en trois points A, B, C d'une parabole de foyer F forment un triangle A'B'C'. Démontrer les relations

$$FA.\overline{FA'}^2 = FB.\overline{FB'}^2 = FC.\overline{FC'}^2$$

$$FA.FB.FC = FA'.FB'.FC'.$$

(E.-N. Barisien.)

2106. Si l'on considère les paraboles qui sont tangentes en O à une droite OT et qui ont la corde normale OA fixe : 1° le lieu du foyer de ces paraboles est une cissoïde droite ; 2° la directrice enveloppe une parabole. (E.-N. Barisien.)

2107. On donne une parabole P et une tangente fixe T à P. Le lieu du foyer des paraboles Q qui ont T pour tangente au sommet et qui sont tangentes à P est une parabole R, tangente aussi à T, ayant même foyer que P et dont l'axe est perpendiculaire à celui de P. (E.-N. Barisien.)

2108. On donne le triangle ABC et le centre O de son cercle circonscrit. On prend les symétriques A', B' de O par rapport aux côtés issus de C : le cercle A'CB' et les cercles analogues pour les sommets A, B se coupent en un même point du cercle ABC. (Canon.)

2109. Du point où le cercle inscrit à un triangle donné touche un des côtés on abaisse une perpendiculaire sur la droite qui joint le milieu de ce côté au centre du cercle. Elle rencontre la hauteur issue du sommet opposé à ce côté en un point dont la distance au milieu du segment compris entre ce sommet et l'orthocentre du triangle est égale au rayon du cercle circonscrit au triangle donné. (Canon.)

2110. Soit sur une ellipse un point M d'où l'on peut mener à la courbe les normales MA, MB, MC. Soit γ le point de rencontre de AB et de la parallèle menée de M à la tangente au point C. On a de même sur AC, BC les points β, α. Les points α, β, γ sont sur une droite parallèle à la tangente au point M à l'ellipse. (Canon.)

2111. On donne quatre plans. On mène une droite D que les quatre plans partagent en segments proportionnels à des segments donnés. Par les points où D rencontre les plans on leur élève des perpendiculaires et l'on construit la seconde droite Δ qui rencontre ces perpendiculaires. Le plan mené par D parallèlement à Δ est parallèle à une même droite quelle que soit la position de D. [A. Mannheim [1].]

---

[1] Question retrouvée dans les papiers laissés par le célèbre géomètre.

[I 23 a]

CONTINUANTS : APPLICATIONS A LA THÉORIE DES NOMBRES;

Par M. A. DELTOUR.

(SUITE.)

REPRÉSENTATION AU MOYEN DE CONTINUANTS DE LA RELATION EN NOMBRES ENTIERS

$$aa' + bb' - cc' = 0. \tag{1}$$

63. Le problème à résoudre consiste à trouver quatre suites α, β, γ, δ, telles que les six continuants qui figurent dans la relation (IV) (n° 17),

$$\Sigma(\alpha\eta_0\underline{\beta})(\gamma\eta_0\delta) = 0, \tag{IV}$$

représentent respectivement les six nombres entiers a, a', b, b', c, c'.

Cherchons d'abord à quelles conditions doivent satisfaire ces nombres pour qu'il y ait une solution.

Désignons les quatre quantités du n° 17

$$x = \frac{(\alpha)}{(\alpha_{0,1})}, \qquad y = \frac{(\beta)}{(\beta_{0,1})}, \qquad z = \frac{(\gamma)}{(\gamma_{0,1})}, \qquad t = \frac{(\delta)}{(\delta_{0,1})}$$

respectivement par les fractions

$$\frac{x}{x'}, \quad \frac{y}{y'}, \quad \frac{z}{z'}, \quad \frac{t}{t'},$$

qui doivent être irréductibles.

Les équations du problème sont

$$\left\{\begin{array}{ll} a = xy' - x'y, & a' = zt' - z't, \\ b = xz' - x'z, & b' = ty' - t'y, \\ c = xt' - x't, & c' = yz' - y'z. \end{array}\right. \tag{2}$$

On en déduit les égalités suivantes qu'on peut d'ailleurs vérifier en remplaçant a, b, c, a', b', c' par leurs valeurs (2) :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} a'x - bt - cz &= 0,\\ -at - b'x - cy &= 0,\\ az - by - c'x &= 0,\\ a'y - b'z + c't &= 0.\end{aligned}\right.$$

$$(3')\quad \left\{\begin{aligned} a'x' - bt' - cz' &= 0,\\ -at' - b'x' - cy' &= 0,\\ az' - by' + c'x' &= 0,\\ a'y' - b'z' + c't' &= 0.\end{aligned}\right.$$

Dans chacun des systèmes (3), (3'), deux des égalités sont une conséquence des deux autres en tenant compte de la relation (1).

En multipliant l'une des égalités (3) par un nombre quelconque u', l'égalité correspondante de (3') par un autre nombre u et retranchant, on obtiendra une relation semblable avec des inconnues telles que

$$(xu' - x'u).$$

On peut déterminer u et u' de telle sorte que l'une quelconque de ces inconnues, par exemple $(xu' - x'u)$, soit égale à 1, puisque x et x' sont premiers entre eux.

On en conclut que, *dans chacune des égalités* (3), *les nombres obtenus en divisant les trois coefficients par leur plus grand commun diviseur doivent être premiers entre eux deux à deux.*

Ces conditions jointes à celle de l'irréductibilité des fractions telles que $\frac{x}{x'}$ sont nécessaires pour qu'il y ait une solution.

Il reste à démontrer qu'elles sont suffisantes.

64. Soient :

d le plus grand commun diviseur de a, a', b, b', c, c', donnant pour quotients a_1, a'_1, b_1, b'_1, c_1, c'_1 ;

m le plus grand commun diviseur de a'_1, b'_1, c'_1 ;

n » a'_1, b_1, c_1 ;

p » a_1, b'_1, c_1 ;

q » a_1, b_1, c'_1.

Les quatre nombres m, n, p, q sont premiers entre eux deux à deux ; car, si m et n, par exemple, avaient un facteur commun, ce facteur divisant b'_1 et c_1 diviserait p et a_1 et par suite les six nombres a_1, b_1, c_1, a'_1, b'_1, c'_1, contrairement à l'hypothèse.

Chacun de ceux-ci est, par conséquent, divisible par le produit de deux des nombres m, n, p, q.

On posera donc

$$a = dpqa_2, \qquad a' = dmna'_2,$$
$$b = dqnb_2, \qquad b' = dmpb'_2,$$
$$c = dnpc_2, \qquad c' = dmqc'_2,$$

les facteurs non communs à deux de ces quantités étant premiers entre eux lorsque ces quantités ne sont pas désignées par la même lettre (a, b ou c).

Les équations (1) et (3) deviennent

$$(1') \qquad a_2a'_2 + b_2b'_2 + c_2c'_2 = 0,$$

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} ma'_2x + qb_2t - pc_2z &= 0, \\ -qa_2t + mb'_2x + nc_2y &= 0, \\ pa_2z - nb_2y + mc'_2x &= 0, \\ na'_2y + pb'_2z + qc'_2t &= 0. \end{aligned} \right.$$

Il est inutile d'écrire les équations semblables provenant de (3').

65. Proposons-nous de résoudre le système (4). Considérons, à cet effet, la première égalité.

Supposons que x ait une valeur donnée. Il existe au moins une solution z, t, puisque qb_2 et pc_2 sont premiers entre eux.

En multipliant l'égalité par a_2 et en tenant compte de (1'), elle peut s'écrire

$$b_2(qa_2t - mb'_2x) = c_2(pa_2z - mc'_2x),$$

et, en la comparant aux deux égalités suivantes, on a (r étant un nombre entier)

$$r = \frac{qa_2t - mb'_2x}{c_2} = \frac{pa_2z + mc'_2x}{b_2} = ny.$$

Le nombre r doit donc être divisible par n.

Or, les solutions t de la première égalité diffèrent entre elles d'un multiple de pc_2, les nombres r correspondants d'un multiple de pqa_2.

Puisque n et pqa_2 sont premiers entre eux, il existe au moins une valeur de r divisible par n, et par suite une solution pour y.

Une solution étant donnée y, z, t, on aura la solution générale $y+h$, $z+k$, $t+l$ pour des valeurs de h, k, l satisfaisant aux conditions

$$qb_2l = pc_2k,$$
$$nc_2h = qa_2l,$$
$$pa_2k = nb_2h,$$

ou

$$\frac{h}{pqa_2} = \frac{k}{qnb_2} = \frac{l}{npc_2} = f,$$

où f est un entier.

66. Pour trouver maintenant les suites α, β, γ, δ, nous mettrons la relation (IV) sous la forme

$$\Sigma\,(\overline{\eta\circ\eta\circ\alpha\eta\circ\beta})(\overline{\gamma\circ\eta\alpha\eta\circ\alpha\eta\circ\delta}) = 0.$$

Elle se compose alors au moyen de quatre suites α', β', γ', δ', qui sont

$$(\alpha') = (\eta\, 0),$$
$$(\beta') = (\beta\, 0\, \underline{\eta}\, \alpha),$$
$$(\gamma') = (\gamma\, 0\, \eta\, \underline{\alpha}),$$
$$(\delta') = (\delta\, 0\, \underline{\eta}\, \underline{\alpha}).$$

La relation étant symétrique par rapport à α, β, γ, δ, il existe trois autres formes analogues en opérant sur β, γ, δ de la même façon que sur α.

Le caractère de cette nouvelle forme consiste en ce qu'on a

$$(\alpha') \quad = 0,$$
$$(\alpha_{0.1}) = 1.$$

Réciproquement, lorsqu'on a une telle relation (IV) en α', β', γ', δ', on passe à la première en α, β, γ, δ en détachant la partie commune des suites $\beta'\gamma'\delta'$ pour en composer α.

Il suffit, par conséquent, de trouver quatre suites telles que α', β', γ', δ'.

Faisant donc $x = 0$, $x' = 1$ dans (2), ce système se réduit aux conditions

$$(5) \qquad \begin{cases} a = -y, & a' + bt' - cz' = 0, \\ b = -z, & -at' - b' + cy' = 0, \\ c = -t, & az' - by' + c' = 0. \end{cases}$$

Les trois dernières se confondent avec le système (3'), où l'on fait $x' = 1$.

Or, nous avons vu que ce système admet au moins une solution.

Si, en outre, cette solution est telle que les fractions $\frac{y}{y'}$, $\frac{z}{z'}$, $\frac{t}{t'}$ soient irréductibles, celles-ci permettent de trouver β', γ', δ'.

En particulier, lorque $d = 1$, cette dernière condition est satisfaite ; car si y et y', c'est-à-dire a et y', par exemple, avaient un facteur commun, ce facteur diviserait b' et c' d'après (5). Mais les diviseurs de d peuvent seuls diviser à la fois a, b' et c' (n° 63).

67. *Changements de signes dans la relation* (1). — La formule (IV) se prête à la représentation de (1) pour toutes les valeurs relatives que prennent les quantités a, a', b, b', c, c'.

Car, en substituant la suite $(0, r_1)$ à $(r_1, 0)$ dans l'un quelconque des continuants de (IV), on change le signe de ce dernier (T_6) (n° 12).

Par exemple, la relation (1) étant représentée par (IV), la relation

$$(-a)(-a') - bb' - cc' = 0$$

sera représentée par

$$\begin{gathered}(\alpha, 0, r_1, \beta)(\gamma, 0, r_1, \delta) \\ -(\alpha, r_1, 0, \gamma)(\delta, r_1, 0, \beta) + (\alpha, r_1, 0, \delta)(\beta, r_1, 0, \gamma) = 0.\end{gathered}$$

68. *Cas particulier : $ab - cd = \pm 1$.* — Dans le cas particulier où la relation (IV) prend la forme (VI) et où (1) devient

$$ab - cd = \pm 1, \tag{6}$$

l'identification se fait en posant

$$a = N, \qquad c = R$$

et en cherchant le continuant (α) qui correspond à $\frac{N}{R}$. Celui-ci est pris long ou court de manière à donner à n_α la parité qui convient.

Relativement aux signes de a, b, c, d, on peut se

proposer de représenter ces quatre quantités affectées de tous les signes possibles compatibles avec l'égalité donnée.

Cette question s'est présentée notamment au n° 57 dans la recherche des suites $\beta^{(r)}$.

Elle y a été résolue d'une manière particulière en donnant par convention le même signe à c_r et à b_{r+1}.

Mais, pour la résoudre dans tous les cas, supposons a, b, c, d positifs, a étant le plus grand de ces nombres, et prenons comme point de départ le continuant positif

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (a_1, \beta, a_k),$$

qui sert à représenter l'égalité (6) $ab - cd = \pm 1$.

On a les solutions suivantes pour les différents signes dont les nombres a, b, c, d sont affectés :

a.	b.	c.	d.	(α).
+	+	−	+	(a_1, β, a_k)
−	+	+	−	$(-a_1, \eta_1, \beta, a_k)$
−	−	−	−	$(a_1, \beta, \eta_1, -a_k)$
+	−	−	−	$(-a_1, \eta_1, \beta, \eta_1, -a_k)$

Dans les autres cas, il suffit d'introduire entre deux éléments de l'un des continuants précédents la suite $(\eta_1, 0, \eta_1, 0)$ au moyen de laquelle on change les signes des quatre quantités.

De ces solutions (α) on déduit toutes les autres, qui sont évidemment en nombre illimité, par des transformations qui n'altèrent aucune des quatre quantités (α), $(\alpha_{1,1})$, $(\alpha_{0,1})$, $(\alpha_{1,0})$.

ADJOINTS ENTIERS.

69. *Définitions.* — Les adjoints seront dits *normaux*, *alternés*, *entiers*, *positifs*, *négatifs*, si leurs continuants le sont.

Ils admettront les mêmes résidus qu'eux.

70. *Réduction d'un adjoint à un adjoint positif.* — Nous aurons à appliquer ici les transformations indiquées au n° 21, et il convient d'observer à ce propos que, en vertu de la propriété démontrée au n° 20, la suite des éléments d'un adjoint doit être considérée comme disposée en cercle et comme formant une période.

L'adjoint correspond à différents continuants suivant celui de ses éléments qui est pris comme point de départ, mais sa valeur ne dépend que de la période. On peut donc choisir à volonté le premier élément lorsqu'on applique les transformations du n° 21.

71. L'opération de la réduction repose sur la proposition suivante :

Si deux suites α, β *sont telles qu'on ait l'égalité*

$$((\alpha, \alpha)) = ((\beta, \beta)),$$

et si les adjoints $((\alpha))$, $((\beta))$ *sont différents de zéro, on a aussi*

$$((\alpha))^2 = ((\beta))^2.$$

En effet, de la relation

$$((\alpha, \alpha)) = ((\alpha))^2 - 2(-1)^{n_\alpha},$$

qu'il est facile de vérifier et qui est d'ailleurs un cas particulier de la seconde relation (B_3) (n° 35), on déduit

$$((\alpha))^2 - ((\beta))^2 = 2[(-1)^{n_\alpha} - (-1)^{n_\beta}].$$

Si $n_\alpha \equiv n_\beta \pmod 2$, la proposition est démontrée.

Si n_α et n_β sont de parité différente, on peut supposer n_α pair ; on a

$$((\alpha))^2 - ((\beta))^2 = 4.$$

ce qui ne peut avoir lieu que pour les valeurs

$$((\alpha)) = \pm 2,$$
$$((\beta)) = 0,$$

contrairement à l'hypothèse.

72. *Lorsqu'on transforme un adjoint double* $((\alpha, \alpha))$ *par les procédés des* n°s 52, 53, 54, *la valeur absolue reste invariable et le résultat est un adjoint double positif* $((\beta, \beta))$.

Si l'on a soin d'appliquer chacune des transformations aux deux suites dont les éléments se correspondent deux à deux, la correspondance des éléments ne cesse pas d'exister et leur nombre reste toujours pair. Examinons en détail chacune des opérations.

1° *Élimination des éléments nuls* (n° 52). — Il est évident que la valeur de l'adjoint ne change pas et que le résultat est de la forme $((\gamma, \gamma))$.

2° *Élimination des éléments égaux à* ± 1 (n° 53). — En passant de l'adjoint normal à l'adjoint alterné,

$$((i\gamma', (-1)^{n_\gamma} i\gamma')),$$

puis en supprimant $\pm$ I (les I supprimés se correspondent deux à deux et sont en nombre pair), on obtient un adjoint de la forme

$$((i\delta', (-1)^{n_\gamma} i\delta')).$$

En revenant à un adjoint normal, ce dernier sera de la forme

$$((\delta, (-1)^{n_\gamma + n_\delta}\delta)).$$

Dans la première et la dernière de ces opérations, la valeur de l'adjoint ne change pas, puisque le nombre des éléments est pair.

Entre ces deux opérations, on supprime un nombre pair de fois ± 1, et, par conséquent, la valeur est multipliée par un produit de facteurs égaux à $\pm i^2$.

La valeur absolue de l'adjoint n'est donc pas modifiée.

3° *Changement de signe des éléments* (n° 54). — Le dernier adjoint obtenu $((\delta, \pm\delta)$ ne renferme plus que des éléments $\geqq 2$ en valeur absolue.

Les suites η introduites pour changer les signes des éléments sont placées à chaque variation de signe et se correspondent deux à deux.

Le résultat final est donc de la forme $((\beta, \beta)$, tous les éléments étant positifs.

On sait d'ailleurs que cette opération ne modifie pas la valeur absolue.

Comme conclusion, *la réduction d'un adjoint donné* $((\alpha)$ *à un adjoint positif* $((\beta)$ *s'obtient en transformant l'adjoint double* $((\alpha, \alpha)$ *en adjoint double positif* $((\beta, \beta)$.

Exemple. — Pour

$$((\alpha) = ((3, -7, 11, -1, -2, 5, 8) = -24\,476,$$

on trouve

$$((\beta) = ((2, 1, 5, 1, 9, 2, 1, 4, 8) = 24\,476.$$

73. *Adjoints positifs de valeur donnée.* — La relation

$$\text{(VI)} \qquad (\alpha)(\alpha_{1,1}) - (\alpha_{0,1})(\alpha_{1,0}) = (-1)^{n_\alpha}$$

permet de trouver tous les adjoints positifs $((\alpha)$ ayant pour valeur un nombre positif donné N.

Remarquons que les deux résidus sont plus petits

que (α) et posons

$$N = a + b \qquad (a \text{ et } b \text{ positifs, } a > b).$$

Décomposons alors $ab \pm 1$ en deux facteurs c, d $(c < a,\ d < a)$, et cherchons le continuant positif (α) qui correspond à la relation

$$(6) \qquad ab - cd = \pm 1.$$

L'adjoint $((\alpha)$ a pour valeur N.

Réciproquement, tout adjoint positif $((\alpha)$ de valeur N correspond à une certaine relation (6).

On aura donc tous les adjoints positifs de N en faisant de toutes les manières possibles les décompositions

$$N = a + b,$$
$$ab \pm 1 = cd,$$

qui sont en nombre fini.

Remarques. — 1° Le même adjoint est obtenu, en général, autant de fois qu'il contient d'éléments, puisque, par permutation circulaire de ces derniers, la valeur ne change pas et qu'à chaque permutation correspond une relation (6) distincte.

Toutefois, il est obtenu moins souvent si cette dernière condition n'est pas remplie, par exemple dans le cas d'un adjoint tel que $((\alpha^m)$ ou $((\alpha, \underline{\alpha})$.

2° Si l'adjoint $((\alpha)$ au lieu d'être positif est quelconque, il correspond encore à une relation (6), mais dans laquelle les entiers a, b, c, d ne sont plus soumis à des relations de grandeur.

Réciproquement, étant donnée une telle relation, on trouve un adjoint $((\alpha)$ correspondant qui se réduit à un adjoint positif par le procédé indiqué au numéro précédent.

Exemples. — 1° Soit $N = 41$; on trouve les adjoints positifs suivants :

$$((41)),\quad ((1, 39)),\quad ((3, 13)),\quad ((3, 1, 1, 5)),\quad ((1, 1, 7, 1, 1)).$$

2° Soit $N = 59$; on trouve

$$((59)),\quad ((1, 57)),\quad ((3, 19)),\quad ((2, 2, 11)),$$
$$((3, 4, 4)),\quad ((1, 1, 4, 1, 4)),\quad ((1, 1, 1, 2, 1, 4)).$$

74. *Transformation des adjoints positifs entre eux.* — Si les deux relations

$$ab - cd = \pm 1,$$
$$ab - c'd' = \pm 1,$$

où $cd = c'd'$, correspondent aux deux adjoints positifs $((\alpha))$, $((\alpha'))$, l'un de ces derniers se transforme dans l'autre.

Soient, en effet,

$$(\alpha_{0,1}) = c = f.m, \qquad (\alpha'_{0,1}) = c' = f.m',$$
$$(\alpha_{1,0}) = d = g.m', \qquad (\alpha'_{1,0}) = d' = g.m$$

(m, m' premiers entre eux).

Puisque $(\alpha_{0,1})$ est divisible par m, (α) se transforme par le procédé du n° 57 en un continuant (β) tel que

$$(\beta_{0,1}) = f,$$
$$(\beta_{1,0}) = g.mm';$$

de même (β) en (α') en divisant le résidu de (β) par m'.

Conséquence. — Tout adjoint positif de valeur N se ramène de cette manière à un adjoint *pour lequel l'un des facteurs c, d est réduit à l'unité,* savoir :

1° Pour n_α pair, à

$$((0, a - 1, 1, b - 1)),$$

où l'on a

$$c = 1,$$

$$d = ab - 1,$$

et qui se réduit à

$$((1, a + b - 2) = ((1, N - 2);$$

2° Pour n_α impair, à

$$((0, a, b),$$

où l'on a

$$c = 1,$$

$$d = ab + 1,$$

et qui se réduit à

$$((a + b) + ((N).$$

CONTINUANTS ET ADJOINTS UNITAIRES.

75. *Définition.* — On nommera *unitaires* les continuants entiers des types θ, θ', τ_1, τ_1', ainsi que les continuants alternés et les adjoints correspondants.

76. *Groupement des continuants par adjoints.* — Les continuants unitaires dont on a donné quelques exemples au n° 9 sont en nombre illimité. Leur classement et leur constitution présentent quelques particularités intéressantes. Il convient pour en faire l'étude de considérer leurs adjoints et, comme il sera indiqué au n° 79, de faire usage du système alterné. Car on sait que, dans ce système, tous les continuants d'un adjoint unitaire appartiennent au même type (n° 31, *Remarque*).

Nous supposerons que les adjoints n'ont aucun élément nul. Ceux qui en contiennent se déduisent en effet immédiatement des autres en y remplaçant certains éléments a par des suites b, α, 0, $-\alpha$, c (n° 21).

77. *Un adjoint unitaire* $((\lambda)$ *se réduit à un adjoint positif* $((\beta)$ *pour lequel* $n_\beta = 0$.

On a, en effet,

$$((\lambda, \lambda) = (\lambda)^2 + 2(\lambda_{0,1})(\lambda_{1,0}) - (\lambda_{1,1})^2 = 2.$$

Suivant la règle générale (n° 72), $((\lambda, \lambda)$ se réduit à un adjoint double positif $((\beta, \beta)$ de même valeur.

Or, le développement de $((\beta, \beta)$, dans lequel tous les termes sont positifs, montre qu'on ne peut avoir $((\beta, \beta) = 2$ que si $n_\beta = 0$.

78. *Un adjoint unitaire, sans zéro,* $((\lambda)$ *a au moins un élément égal à* ± 1.

En effet, si tous les éléments étaient $\geqq 2$ en valeur absolue, $((\lambda, \lambda)$ se trouverait dans les conditions du n° 72 (3°) pour être réduit à un adjoint double positif $((\beta, \beta)$ de valeur 2 et tel que

$$n_\beta \geqq n_\lambda,$$

ce qui est impossible puisqu'on doit avoir

$$n_\beta = 0.$$

79. Dans les numéros suivants marqués (*Syst. alt.*), nous ferons usage du système alterné en supprimant le facteur i pour simplifier l'écriture. Il suffit de multiplier chaque élément par ce facteur pour revenir à la notation primitive. Ainsi, on écrira (α) au lieu de $(i\alpha)$.

80. *Tout adjoint unitaire rentre dans l'une des trois catégories*

$$((\alpha) = ((\lambda, \alpha'), \qquad ((\beta) = ((\lambda_{0,1}, \beta'), \qquad ((\gamma) = ((\lambda_{1,1}, \gamma'),$$

où (λ) *représente un unitaire quelconque* (*Syst. alt.*).

En effet, il résulte de la proposition précédente que, à défaut d'autre, une des suites $\pm 1_{1,1}$ soit $(1, 1, 1)$ ou

$(-1, -1, -1)$ étant prise pour (λ), tout adjoint prendra l'une de ces trois formes, savoir : $((\alpha)$ ou $((\beta)$ s'il y a trois ou deux éléments successifs égaux à $+1$ ou à -1, $((\gamma)$ dans le cas contraire.

81. *Forme des adjoints* $((\alpha)$, $((\beta)$, $((\gamma)$ (*Syst. alt.*). — Cherchons maintenant les conditions que doivent remplir α', β', γ' pour que $((\alpha)$, $((\beta)$, $((\gamma)$ soient unitaires.

Pour $((\alpha)$, il faut et il suffit que $((\alpha')$ le soit aussi : le calcul ne présente aucune difficulté.

Quant à $((\beta)$ et $((\gamma)$, posons

$$\lambda = (l_2, \lambda_{1,1}, l_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\beta') = (l_1, 0, b_2, \beta'', b_1), \\ (\gamma') = (l_1, 0, c_2, \gamma'', c_1, 0, l_2). \end{array} \right.$$

On a

$$((\beta) = ((\lambda, 0, b_2, \beta'', b_1),$$
$$((\gamma) = ((\lambda, 0, c_2, \gamma'', c_1, 0).$$

Comme $((\alpha')$ dans $((\alpha)$, les suites qui viennent après λ dans ces expressions doivent donner des adjoints unitaires, savoir :

$$((0, b_2, \beta'', b_1) \qquad \text{ou} \qquad ((b_1 - b_2, \beta'')$$

et

$$((0, c_2, \gamma'', c_1, 0) \qquad \text{ou} \qquad ((c_2, \gamma'', c_1).$$

Par conséquent, $((\alpha)$, $((\beta)$, $((\gamma)$ sont formés au moyen de deux unitaires juxtaposés; l'un d'eux, dans $((\beta)$, commence par zéro et, dans $((\gamma)$, a ses deux éléments extrêmes nuls.

En représentant par μ un second unitaire, avec

$$(\mu) = (m_2, \mu_{1,1}, m_1),$$

et en posant

$$\alpha' = \mu, \qquad \beta'' = \mu_{0,1}, \qquad \gamma'' = \mu_{1,1},$$

ces adjoints s'écrivent

$$((\alpha) = ((\lambda, \mu),$$
$$((\beta) = ((\lambda_{0,1}, a, \mu_{0,1}, b),$$
$$((\gamma) = ((\lambda_{1,1}, l_1 + m_2, \mu_{1,1}, m_1 + l_2).$$

Dans $((\beta)$, a et b sont deux éléments liés par la condition

$$a + b = l_1 + m_1,$$

comme on le vérifie aisément. Il reste donc un paramètre variable lorsque λ et μ sont donnés.

$((\alpha)$ se présente comme un cas particulier de $((\beta)$ lorsqu'on fait

$$a = l_1, \qquad b = m_1.$$

A leur tour, λ et μ rentrent dans l'une des trois catégories et sont eux-mêmes formés au moyen d'autres unitaires, et ainsi de suite.

82. *Adjoints* $((\gamma)$ *dont tous les éléments sont positifs* (*Syst. alt.*). — D'après ce qui précède, tout adjoint unitaire peut être considéré comme composé au moyen d'adjoints $((\gamma)$. Il suffit en effet, pour cela, de terminer la série des décompositions lorsque tous les unitaires au moyen desquels est formé l'adjoint appartiennent à cette catégorie.

Les adjoints $((\gamma)$ se déduisent aussi les uns des autres, car on peut poursuivre la série des décompositions jusqu'à ce que le dernier élément ait disparu. Parmi eux, nous distinguerons spécialement, par analogie avec la réduction des continuants, ceux dont tous les éléments sont positifs et qui ne peuvent pas se mettre sous l'une des deux autres formes. Nous les désignerons par $((\delta)$.

83. *Mode de formation des adjoints* $((\delta)$ (*Syst.*

alt.). — Faisons

$$(\lambda) = (1, 1, 1)$$

et soit

$$((\delta) = ((1, \delta')$$

un adjoint de n_δ éléments positifs.

Mettons (δ') sous la forme $(1, 0, \delta'', 0, 1)$. $((\delta'')$ *appartient à la même catégorie que* $((\delta)$.

En effet, $((\delta'')$ a $n_\delta - 1$ éléments positifs et différents de zéro, puisque, par hypothèse, les deux éléments extrêmes de δ' sont $\geqq 2$; d'autre part, il n'est ni un $((\alpha)$ ni un $((\beta)$; autrement, un des unitaires λ, μ ou un des résidus $\lambda_{0,1}$, $\mu_{0,1}$ qu'il contiendrait se trouverait dans $((\delta)$, contrairement à l'hypothèse.

Réciproquement, soit

$$((\delta'') = ((d_2, \delta''_{1,1}, d_1)$$

un unitaire ayant $n_\delta - 1$ éléments positifs et défini comme ci-dessus. L'adjoint

$$((\delta) = ((d_1 + 1, 1, d_2 - 1, \delta''_{1,1}),$$

obtenu en introduisant

$$(0, \lambda, 0) = (0, 1, 1, 1, 0)$$

entre deux de ses éléments d_1, d_2, a n_δ éléments positifs. On voit d'ailleurs facilement, par un raisonnement analogue au précédent, qu'il ne peut pas prendre la forme $((\alpha)$ et qu'il ne peut prendre la forme $((\beta)$ que si l'élément 1 se confond avec l'un des éléments a, b qui figurent dans l'expression de $((\beta)$ (n° 81).

On obtiendra donc tous les adjoints $((\delta)$ de n_δ éléments en introduisant $\lambda = (0, 1, 1, 1, 0)$ de toutes les manières possibles dans ceux de $n_\delta - 1$ éléments, en laissant de côté ceux qui rentreraient dans la catégorie $((\beta)$.

On trouve pour les premières valeurs de n_δ [$((\tilde\delta)$ et $((\underline{\tilde\delta})$ étant considérés comme ne faisant qu'un seul adjoint] :

n_δ.	$((\delta)$.
3	$((1, 1, 1)$
4	$((1, 2, 1, 2)$
5	$((2, 1, 3, 1, 2)$
6	$((3, 1, 2, 3, 1, 2)$
	$((2, 2, 1, 4, 1, 2)$
	$((1, 3, 1, 3, 1, 3)$
7	$((4, 1, 2, 2, 3, 1, 2)$
	$((3, 2, 1, 3, 3, 1, 2)$
	$((3, 1, 3, 1, 4, 1, 2)$
	$((3, 2, 1, 4, 1, 3, 1)$
	$((2, 2, 1, 5, 1, 2, 2)$

84. *Adjoints unitaires composés de suites périodiques* (*Syst. alt.*). — Parmi les $((\tilde\delta)$ du numéro précédent, il en est qui se composent de suites périodiques, par exemple

$$((\overbrace{1, 2}, \overbrace{1, 2}), \quad ((\overbrace{3, 1, 2}, \overbrace{3, 1, 2}), \quad ((\overbrace{1, 3}, \overbrace{1, 3}, \overbrace{1, 3}).$$

Proposons-nous de trouver d'une manière générale les adjoints unitaires qui jouissent de cette propriété.

85. *Un adjoint unitaire* (*à éléments positifs ou négatifs*) *composé de plus de trois périodes est un* $((\alpha)$ (*notation du n°* 80) (*Syst. alt.*). — En effet, dans chaque période se trouve au moins un élément égal à ± 1.

En éliminant de chacune d'elles ± 1, ainsi que les éléments nuls s'il y a lieu, on réduit l'adjoint à un autre qui contient un nombre moindre d'éléments et qui est composé du même nombre de périodes.

Après une série d'éliminations semblables, on ob-

tient un adjoint dans lequel chaque période est réduite à un seul élément égal à zéro ou à ± 1.

Le nombre des périodes est nécessairement pair si cet élément est zéro et il est divisible par 3 lorsque l'élément est ± 1.

Dans tous les cas, le dernier adjoint ayant plus de trois périodes se met sous la forme $((\lambda, \mu)$ et par conséquent est un $((\alpha)$.

Il en est évidemment de même de l'adjoint donné.

Conséquence. — Les adjoints $((\beta)$, $((\gamma)$, $((\delta)$ *se composent au maximum de trois périodes.*

En désignant par ν une des suites dont se compose un de ces adjoints, celui-ci pourra prendre l'une des formes $((\nu^2)$ ou $((\nu^3)$.

86. *Conditions que doit remplir une suite* ν *pour que* $((\nu^2)$ *ou* $((\nu^3)$ *soit unitaire* (*Syst. alt.*). — Ces conditions résultent des relations suivantes, que le lecteur vérifiera sans difficulté :

$$(\nu^2) \quad = (\nu) \quad ((\nu) - (-1)^{n_\nu},$$
$$(\nu^2_{0,1}) = (\nu_{0,1}) \; ((\nu),$$
$$(\nu^2_{1,0}) = (\nu_{1,0}) \; ((\nu),$$
$$(\nu^2_{1,1}) = (\nu_{1,1}) \; ((\nu) - (-1)^{n_\nu},$$
$$(\nu^3) \quad = (\nu) \quad [((\nu)^2 - (-1)^{n_\nu}] - (-1)^{n_\nu}((\nu),$$
$$(\nu^3_{0,1}) = (\nu_{0,1})[((\nu)^2 - (-1)^{n_\nu}],$$
$$(\nu^3_{1,0}) = (\nu_{1,0})[((\nu)^2 - (-1)^{n_\nu}],$$
$$(\nu^3_{1,1}) = (\nu_{1,1})[((\nu)^2 - (-1)^{n_\nu}] - (-1)^{n_\nu}((\nu).$$

1° Soit $((\nu^2)$ un adjoint unitaire.

Pour que $(\nu^2_{0,1})$ et $(\nu^2_{1,0})$ soient nuls, il faut qu'on ait soit

$$((\nu) = 0,$$

soit

$$((\nu_{0,1}) = 0,$$
$$((\nu_{1,0}) = 0.$$

Dans le dernier cas, $((\nu)$ serait un unitaire et $((\nu^2)$ un $((\alpha)$.

On doit donc avoir

$$((\nu) = 0.$$

Cette condition suffit d'ailleurs à rendre $((\nu^2)$ unitaire. Mise sous la forme

$$(\nu) + (\nu_{1,1}) = 0,$$

elle montre que les continuants (ν) et $-(\nu_{1,1})$ représentent un même nombre.

2° Soit $((\nu^3)$ un adjoint unitaire.

Pour la même raison que ci-dessus, on déduit des relations précédentes

$$((\nu)^2 - (-1)^{n_\nu} = 0.$$

Cette condition est suffisante. Elle montre que les continuants normaux de (ν) et de $(\nu_{1,1})$ représentent deux nombres qui diffèrent d'une unité.

[O'3k]

NOTE SUR LES COURBES GAUCHES;

PAR M. EGAN.

Condition pour qu'une courbe donnée soit une hélice. — Pour une hélice sur un cylindre de forme quelconque dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z, on a

$$s = kz.$$

s étant la longueur de la courbe, mesurée à partir du point où elle rencontre le plan $z = 0$.

Pareillement, pour toute hélice, on a

$$s = ax + by + cz + d,$$

d'où l'on tire, en différentiant,

$$(1) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0,$$

en désignant $\frac{d^r x}{ds^r}$ par x_r.

Si x, y, z sont données en fonction d'un paramètre t, on a

$$(2) \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & s_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & s_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & s_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & s_4 \end{vmatrix} = 0.$$

On vérifie facilement d'ailleurs que

$$\Delta' = -\left(\frac{ds}{dt}\right)^{10} \Delta.$$

Réciproquement, si l'équation $\Delta = 0$ ou $\Delta' = 0$ est vérifiée, la courbe est une hélice. Considérons, en effet, x, y, z comme des fonctions données de t. La forme de l'équation $\Delta' = 0$ nous montre que toute fonction s de t qui lui satisfait doit être comprise sous la forme

$$s = ax + by + cz + d,$$

a, b, c, d étant des constantes. Donc la courbe est une hélice.

Expression géométrique de Δ. — Soient R, T les rayons de courbure et de torsion d'une courbe C à un point donné; ρ, τ les mêmes quantités pour le point correspondant de la courbe γ dont les coordonnées sont

$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$. Alors on a, assez facilement,

$$(3) \qquad \frac{1}{\rho^2 \tau} = R^6 \Delta.$$

On trouve aussi

$$\rho^{-1} = -T^{-1}\sqrt{R^2+T^2},$$

$$\tau^{-1} = \frac{-R^3}{R^2+T^2}\frac{d}{ds}\frac{T}{R}.$$

On a donc

$$R^6\Delta = -\frac{R^3}{T^2}\frac{d}{ds}\frac{T}{R}$$

$$= R\frac{d}{ds}\frac{R}{T},$$

$$\Delta = R^{-5}\frac{d}{ds}\frac{R}{T},$$

ce qui montre, comme on devait s'y attendre, que les conditions

$$\Delta = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{R}{T} = \text{const.}$$

s'équivalent.

On peut donner une autre expression pour Δ comme il suit :

On rectifie la courbe C, on le sait, en développant la développable D dont l'élément plan contient la tangente et la binormale au point correspondant de C. Soient P, P′ deux points consécutifs sur C, et soit Q le point correspondant à P sur l'arête de rebroussement de D. Soit ψ l'angle entre PP′ et PQ. Alors

$$\tang\psi = \frac{T}{R}.$$

L'angle ψ et l'angle PQP′ ne sont pas changés par le développement de D. Or, après ce développement, la courbe C devient une droite et l'on a, par conséquent,

$$PQP' = (\psi + d\psi) - \psi = d\psi.$$

On a donc

$$PP' \sin\psi = PQ \sin PQP' = PQ\, d\psi,$$

$$(4) \qquad PQ \frac{d\psi}{ds} = \sin\psi.$$

Soit maintenant p la perpendiculaire abaissée de Q sur PP'; on a

$$1 = p \operatorname{cos\acute{e}c}^2\psi \frac{d\psi}{ds}$$

$$(5) \qquad = -p \frac{d}{ds} \frac{R}{T}.$$

On a donc

$$(6) \qquad \Delta = \frac{-1}{\rho^3 p}.$$

Si la développable D se réduit à un cône, on a $p =$ const. L'équation (5) nous montre donc que les courbes pour lesquelles on trouve

$$\frac{R}{T} = as - b$$

sont des géodésiques sur un cône.

[L¹5e]

DÉMONSTRATION DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DE L'ELLIPSE;

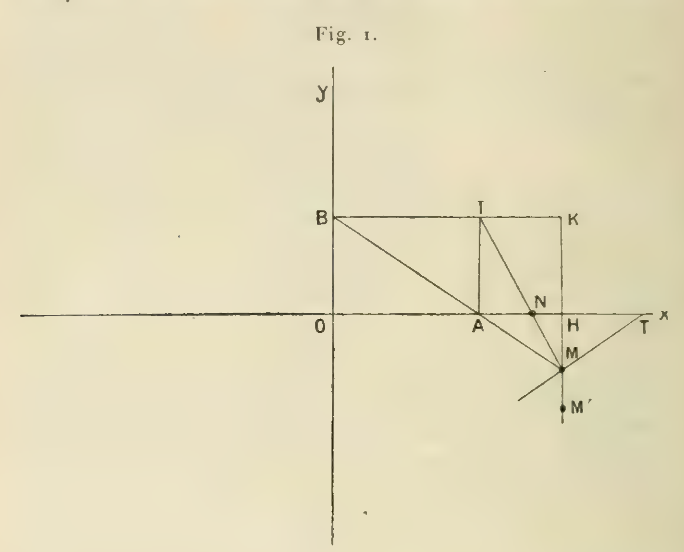
Par M. TÈTU.

Je vais démontrer que :

Une développée d'ellipse peut toujours se projeter orthogonalement suivant une hypocycloïde à quatre rebroussements.

Considérons une droite dont deux points A et B décrivent deux droites rectangulaires Ox, Oy, et soit M un point de cette droite. Le lieu de M est une ellipse.

Fig. 1.



Construisons la normale et la tangente en M à l'aide du centre instantané de rotation I; soient INM et MT. Abaissons MH perpendiculaire sur Ox, et soit M′ le point de MH tel que l'angle AM′T soit droit; on a

$$MH = \sqrt{NH.HT}, \qquad M'H = \sqrt{AH.HT},$$

d'où

$$\frac{HM}{HM'} = \sqrt{\frac{NH}{AH}} = \sqrt{\frac{KI}{KB}} = \sqrt{\frac{MA}{MB}} = \text{const.}$$

Si donc je projette la figure formée par ABM sur un plan parallèle à Ox et faisant avec le plan xOy un angle dont le cosinus soit $\sqrt{\frac{MA}{MB}}$, la droite AB se projettera

suivant la normale à l'ellipse, projection du lieu de M. La propriété est donc démontrée.

En considérant les normales à l'ellipse comme projections d'une droite de longueur constante dont deux points décrivent deux droites rectangulaires, on démontre simplement un grand nombre de propriétés.

Par exemple, il est immédiat que *le rapport des segments interceptés sur une normale à une ellipse par les deux axes est constant.*

Considérons maintenant dans la figure précédente la parabole tangente à Ox, Oy, AB, MT; on reconnaît immédiatement que I en est le foyer et AB la tangente au sommet; cette parabole touche donc AB au pied P de la perpendiculaire abaissée de I sur cette droite. Or ce point est précisément le point de contact de AB avec son enveloppe.

Donc, par projection, on obtient la propriété connue :

La parabole tangente aux axes d'une ellipse, à la normale et à la tangente en un point M touche la normale au centre de courbure de l'ellipse au point M.

Mais remarquons que IP est l'axe de la parabole. Donc la projection de IP sera un diamètre de la parabole projetée. Ce diamètre sera perpendiculaire à la directrice, laquelle n'est autre que la projection de OM. On obtient donc la construction suivante du centre de courbure en un point M d'une ellipse :

Soit Q *le point d'intersection des parallèles aux axes menées par les points où la normale en* M *coupe ces axes; le centre de courbure en* M *se trouve à l'intersection de la normale avec la perpendiculaire abaissée de* Q *sur* OM.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1908).

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

Par M. P. FAVRE.

Un contour convexe est formé des côtés parallèles AB, A'B' *de longueur* $2l$ *d'un rectangle* ABB'A' *et des demi-cercles de rayon* r *décrits sur les deux autres côtés* AA' *et* BB' *comme diamètres. Il se déplace dans son plan d'une façon continue en restant tangent extérieurement à un demi-cercle fixe de rayon* R *et à la droite indéfinie* D *qui limite ce demi-cercle. On suppose que* AB *était sur* D *au début du mouvement et que* A'B' *vient sur cette même droite à la fin du mouvement, après avoir touché le demi-cercle fixe.*

1° *Construire la trajectoire* Γ *du centre* M *du rectangle et reconnaître si elle est convexe.*

2° *Calculer l'aire limitée par* Γ, *dans l'hypothèse*

$$R = r, \qquad l = r(\sqrt{3} - 1).$$

3° *On suppose que l'angle dont tourne le contour est proportionnel au temps; on demande de placer le contour à un instant donné et de construire le vecteur vitesse du point* M *à cet instant.*

4° *Le côté* A'B' *étant tangent au demi-cercle fixe, trouver à un instant donné l'enveloppe des tangentes*

aux trajectoires des différents points du contour. Examiner les différents cas qui peuvent se présenter en supposant $R = r = l$.

1° Le mouvement du contour se divise en trois phases :

Première phase : Le demi-cercle AA' est tangent au demi-cercle fixe et à la droite D;

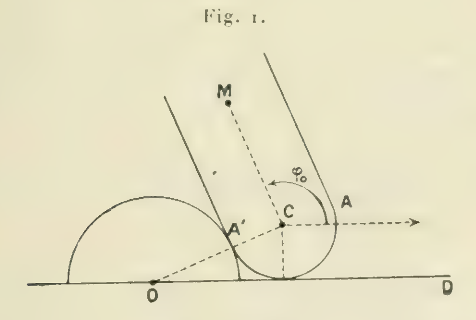
Deuxième phase : Le demi-cercle AA' est tangent à la droite D et le côté $A'B'$ est tangent au demi-cercle fixe;

Troisième phase : Le demi-cercle AA' est tangent à la droite D et le demi-cercle BB' est tangent au demi-cercle fixe.

Dans la première phase, le point M décrit un arc de cercle ayant pour centre C le milieu de AA' et l pour rayon.

Si l'on désigne par φ l'angle de rotation du contour,

Fig. 1.



la valeur φ_0 qui sépare la première phase de la deuxième est donnée (voir *fig.* 1) par la relation

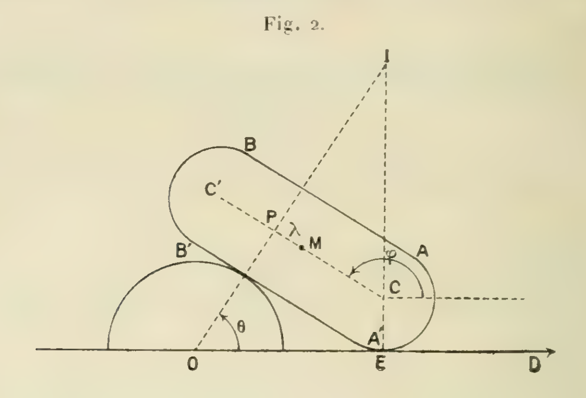
$$\sin\varphi_0 = \frac{\sqrt{R^2 - 2Rr}}{R + r} \qquad \left(\varphi_0 > \frac{\pi}{2}\right).$$

En posant

$$\overline{PM} = \lambda$$

et projetant le contour OPCE sur la droite D et sur

Fig. 2.



une perpendiculaire, on a (*fig.* 2)

$$(R + r)\sin\varphi - \lambda\cos\varphi = x,$$
$$-(R + r)\cos\varphi - \lambda\sin\varphi = l\sin\varphi + r.$$

En éliminant λ on obtient la valeur de x, celle de y est immédiate, et les coordonnées de M dans la deuxième phase sont

$$x = \frac{(R + r) + l\sin\varphi\cos\varphi + r\cos\varphi}{\sin\varphi},$$
$$y = l\sin\varphi + r.$$

Dans la première phase, la trajectoire Γ du point M, étant un arc de cercle, était convexe. Si elle devient concave, il faut que la transition se fasse par un point d'inflexion, c'est-à-dire que $\frac{dy}{dx}$ passe par un maximum ou un minimum. Et s'il n'y a pas de point d'inflexion la courbe Γ restera convexe. Pour résoudre cette ques-

tion, il faut avoir $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$dx = -\frac{r - l\sin^3\varphi + (R - r)\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$
$$dy = l\cos\varphi\,d\varphi,$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-l\cos\varphi\sin^2\varphi}{l\sin^3\varphi + (R + r)\cos\varphi + r}.$$

Si l'on forme $\frac{d^2y}{dx^2}$ on obtient une fraction dont le dénominateur est un carré parfait qui ne devient pas infini et dont le numérateur est, après réductions,

$$l^2\sin^4\varphi - 2l(R + r)\sin\varphi\cos^3\varphi - lr\sin\varphi(2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi),$$

ou

$$l^2\sin^4\varphi - 2lR\sin\varphi\cos^3\varphi - lr\sin\varphi(1 - 3\cos^2\varphi - 2\cos^3\varphi),$$

ou enfin

$$l^2\sin^4\varphi - 2lR\sin\varphi\cos^3\varphi + lr\sin\varphi(1 - 2\cos\varphi)(1 + \cos\varphi)^2.$$

Or, dans cette deuxième phase, φ est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π; donc

$$\sin\varphi > 0, \qquad \cos\varphi < 0,$$

et l'expression ci-dessus est toujours positive.

Il n'y a donc pas de point d'inflexion dans la deuxième phase, et la trajectoire Γ est encore convexe.

Pour avoir la valeur de φ_1 qui marque la fin de la deuxième phase, projetons encore le contour OPCE (en remarquant qu'à ce moment $\lambda = l$) :

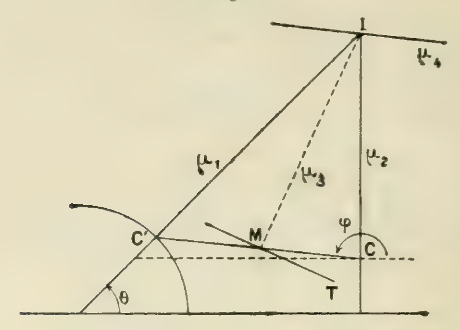
$$(R + r)\cos\varphi_1 + 2l\sin\varphi_1 - r = 0.$$

Dans la troisième phase (*fig.* 3), le milieu C' de BB' décrit un arc de cercle de centre O et de rayon R — r. Ses coordonnées sont, en désignant par θ l'angle C'OD,

$$x_{C'} = (R + r)\cos\theta, \qquad y_{C'} = (R + r)\sin\theta.$$

et le point C sera à l'intersection de la droite $y = r$ et

Fig. 3.



du cercle de centre C' et de rayon $2l$, dont l'équation est

$$[x - (R + r)\cos\theta]^2 + [y - (R + r)\sin\theta]^2 = 4l^2$$

(l'abscisse du point C devant être la plus grande). On en déduit, pour les coordonnées du point C,

$$x_C = (R + r)\cos\theta + \sqrt{4l^2 - [r - (R + r)\sin\theta]^2},$$
$$y_C = r.$$

Le point M étant le milieu du segment CC', ses coordonnées sont

$$x = (R + r)\cos\theta + \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - [r - (R - r)\sin\theta]^2},$$

$$y = \frac{(R - r)}{2}\sin\theta + \frac{r}{2}$$

(le radical est pris positivement).

Pour voir si la courbe est encore convexe, c'est-à-dire ne présente pas de point d'inflexion dans cette troisième phase, nous utiliserons la remarque suivante :

I étant le centre instantané de rotation, les trois droites IC', IM, IC et la parallèle à C'C menée par I

forment une proportion harmonique

$$\frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_1 - \mu_4} : \frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_4} = -1;$$

or

$$\mu_1 = \operatorname{tang}\theta, \qquad \mu_4 = \operatorname{tang}\varphi$$

et μ_2 est infini; donc

$$\mu_3 = 2\mu_1 - \mu_4 = 2\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}\varphi.$$

Si μ est le coefficient angulaire de la tangente à Γ,

$$\mu = -\frac{1}{\mu_3} = \frac{1}{\operatorname{tang}\varphi - 2\operatorname{tang}\theta}.$$

Cette formule montre que dans la troisième phase le coefficient angulaire de la tangente est toujours négatif, et va en croissant en valeur absolue.

Au contraire, dans la deuxième phase, $\frac{d^2y}{dx^2}$ étant positive, la valeur *algébrique* du coefficient angulaire va

Fig. 4.

en croissant. Il y a donc un point d'inflexion en M_1 et la courbe Γ n'est pas convexe.

L'expression ci-dessus de μ permet de trouver les tangentes en M_1 et en M_2

$$\mu' = -0,247, \qquad \mu'' = -0,866.$$

De tout ce qui précède résulte pour Γ la forme ci-contre (*fig.* 4).

2° Si l'on suppose

$$R = r, \qquad l = r(\sqrt{3} - 1),$$

et si l'on se reporte aux formules qui donnent les valeurs φ_0 et φ_1 séparant entre elles les trois phases, on trouve

$$\varphi_0 = 120^\circ \qquad \text{et} \qquad \varphi_1 = 150^\circ.$$

Les formules trouvées dans la deuxième phase donnent, pour les coordonnées de M_0,

$$x_0 = 1,366\,r, \qquad y_0 = 1,634\,r.$$

et, pour les coordonnées de M_1,

$$x_1 = 1,634\,r, \qquad y_1 = 1,366\,r.$$

ω étant le centre (fixe) de rotation dans la première phase, ses coordonnées sont

$$x_\omega = r\sqrt{3}, \qquad y_\omega = r.$$

Pour évaluer l'aire limitée par Γ, nous poserons

$$S_1 = \text{aire } M_2 N M_0 E \omega M_2,$$
$$S_2 = \text{aire du rectangle } EDF\omega.$$
$$S_3 = \text{aire } M_0 Q M_1 D M_0,$$
$$S_4 = \text{aire } M_1 F M_2 V M_1.$$

et nous aurons

$$S = S_1 + S_2 + S_3 - S_4.$$

Aire S_1. — Elle est égale à l'aire du secteur circulaire $\omega M_2 N M_0$ diminuée de celle du triangle $M_0 E \omega$:

$$S_1 = \frac{3,1416 \times \overline{0,732}^2}{3} r^2 - \frac{0,366 \times 0,634}{2} r^2,$$
$$S_1 = (0,561 - 0,116) r^2 = 0,445 r^2.$$

Aire S_2. — Les dimensions du rectangle sont

$$x_\omega - x_1 = 0{,}098\,r, \qquad y_0 - y_\omega = 0{,}634\,r;$$

donc

$$S_2 = 0{,}062\,r^2.$$

Aire S_3. — Cette aire est représentée par l'intégrale définie

$$S_3 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_0} (x_1 - x)\,dy$$

ou

$$S_3 = r^2 \int \left(1{,}634 - \frac{2 - 0{,}732 \sin\varphi \cos\varphi + \cos\varphi}{\sin\varphi}\right) 0{,}732 \cos\varphi\, d\varphi$$

$$= 0{,}732\,r^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_0} \left(1{,}634 \cos\varphi - 2\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} - 0{,}732 \cos^2\varphi - \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\right) d\varphi$$

$$= 0{,}732\,r^2 \int_{150^\circ}^{120^\circ} \left(1{,}634 \cos\varphi - 2\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} - \frac{0{,}732}{2} - \frac{0{,}732}{2}\cos 2\varphi - \frac{1}{\sin\varphi} + \sin\varphi\right) d\varphi.$$

Les quadratures indiquées s'effectuent de suite :

$$S_3 = 0{,}732\,r^2 \left(1{,}634 \sin\varphi - 2 \operatorname{Log} \sin\varphi - 0{,}366\varphi - 0{,}183 \sin 2\varphi - \operatorname{Log} \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} - \cos\varphi\right)_{150}^{120^\circ}.$$

En substituant les limites et réduisant :

$$S_3 = 0{,}732\,r^2 \left(0{,}366\frac{\pi}{6} + 0{,}634\frac{0{,}732}{2} + \operatorname{Log}\frac{\operatorname{tang} 75^\circ}{3 \operatorname{tang} 60^\circ}\right)$$

(les Tables usuelles donnant le logarithme vulgaire, il faut le multiplier par 2,3026 pour avoir le logarithme naturel),

$$S_3 = 0{,}068\,r^2.$$

Aire S_4. — Cette aire est représentée par l'intégrale

définie

$$S_4 = \int_{\theta_2}^{\theta_1} (x - x_1)\, dy.$$

D'ailleurs

$$\theta_1 = 60^\circ \qquad \text{et} \qquad \theta_2 = 30^\circ.$$

En remplaçant x et dy par leurs valeurs en fonction de θ, on obtient

$$S_4 = \int_{30^\circ}^{60^\circ} \Big[(R + r)\cos\theta - \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - [r - (R - r)\sin\theta]^2} - 1,634\, r \Big] \frac{R + r}{2} \cos\theta\, d\theta,$$

$$S_4 = r^2 \int_{30^\circ}^{60^\circ} (1 - \cos 2\theta)\, d\theta - 1,634\, r^2 \int_{30^\circ}^{60^\circ} \cos\theta\, d\theta - \frac{r^2}{4} \int_0^{-0,732} \sqrt{2,143 - t^2}\, dt,$$

en posant

$$1 - 2\sin\theta = t.$$

$$S_4 = r^2 \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right)_{30^\circ}^{60^\circ} - 1,634\, r^2 (\sin\theta)_{30^\circ}^{60^\circ} - \frac{r^2}{4} \left(2,143 \arcsin \frac{t}{\sqrt{2,143}} + \frac{t\sqrt{2,143 - t^2}}{2}\right)_0^{-0,732},$$

$$S_4 = r^2 (0,524 - 0,598 + 0,140 + 0,115),$$

$$S_4 = 0,181\, r^2,$$

d'où

$$S = 0,394\, r^2.$$

3° Soient I le centre instantané à un moment donné et ω la vitesse angulaire de rotation. Le vecteur vitesse du point **M** a pour valeur

$$V = \omega\, \overline{IM}.$$

Si l'on connaît la ligne IM et si l'on construit l'angle α tel que

$$\tan\alpha = \omega,$$

le vecteur vitesse sera le second côté de l'angle droit

dans un triangle rectangle admettant IM pour autre côté de l'angle droit et α pour angle aigu.

La construction de M dans la première phase est immédiate, puisqu'il se meut sur un cercle connu.

Pour la deuxième phase, on construira le cercle de centre O et de rayon $R+r$, on lui mènera une tangente faisant l'angle $\varphi = \omega t$ avec la direction positive de la droite D (voir *fig.* 2), et l'on prendra sur cette tangente un point C à la distance r de D.

Pour la troisième phase, on construira encore le même cercle fixe, et l'on cherchera à placer un segment CC′ de longueur $2l$ incliné de l'angle φ sur D, et s'appuyant à la fois sur le cercle fixe et sur la droite $y=r$. On arrivera facilement à ce résultat en imprimant à la droite $y=r$ une translation convenable qui donnera le point C′.

4° L'enveloppe se compose de quatre fragments de coniques qui se raccordent de façon à former une courbe continue, mais qui peut avoir des asymptotes. Il y a deux coniques à centre et deux paraboles. Elles admettent toutes les quatre pour foyer le centre instantané I au moment considéré. Les tangentes au sommet des deux paraboles sont les droites AB et A′B′. Les cercles principaux des coniques à centre sont ceux décrits sur AA′ et BB′ comme diamètres. Dans le cas proposé ($R=r=l$), ils sont tangents extérieurement, et par suite les deux coniques à centre ne peuvent être simultanément des ellipses.

Pour savoir si ce sont deux hyperboles ou bien une ellipse et une hyperbole, nous allons former les équations des deux cercles principaux

$$f_1(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_2(x, y) = 0$$

et voir si les coordonnées du point I rendent l'expres-

sion

$$f_1(x, y) f_2(x, y)$$

positive ou négative.

Si cette expression était nulle, l'une des deux coniques à centre serait un cercle. Les coordonnées du point C sont

$$x = \frac{2 - \sin\theta}{\cos\theta} r, \qquad y = r;$$

donc

$$f_1(x, y) \equiv \left(x - \frac{2 - \sin\theta}{\cos\theta} r\right)^2 + (y - r)^2 - r^2 = 0.$$

Les coordonnées du point C′ sont

$$x = \frac{2 - \sin\theta}{\cos\theta} r - 2r\sin\theta,$$
$$y = (1 + 2\cos\theta) r;$$

donc

$$f_2(x, y) \equiv \left(x - \frac{2 - \sin\theta}{\cos\theta} r - 2r\sin\theta\right)^2$$
$$+ [y - (1 + 2\cos\theta) r]^2 - r^2 = 0.$$

En remarquant que le point I a même abscisse que le point C et que la droite OI a pour coefficient angulaire $\tang\theta$, on obtient pour les coordonnées du point I

$$X = \frac{2 - \sin\theta}{\cos\theta} r,$$
$$Y = \frac{(2 - \sin\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta} r.$$

En substituant on trouve

$$\frac{f_1(X, Y)}{r^2} \equiv \frac{(2\sin\theta - 1)^2}{\cos^4\theta} - 1.$$
$$\frac{f_2(X, Y)}{r^2} \equiv 4\sin^2\theta + \left(\frac{2\sin\theta - 2\cos^3\theta - 1}{\cos^2\theta}\right)^2 - 1.$$

Posons

$$\Phi(\theta) = \frac{f_1(X, Y) f_2(X, Y)}{r^4};$$

Si $\Phi(\theta) < 0$, on aura une ellipse et une hyperbole;
Si $\Phi(\theta) > 0$, on aura deux hyperboles.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

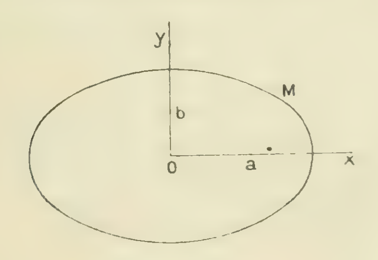
Bordeaux.

Épreuve théorique. — I. *Questions de cours :*

1° *Ellipsoïde d'inertie ;*

2° *Stabilité de l'équilibre. — Théorème de Lagrange ; démonstration de Lejeune-Dirichlet.*

II. Problème. — *Un point matériel* M *de masse* m *est assujetti à se mouvoir sans frottement sur une ellipse de*



centre O *et dont les demi-axes ont pour longueurs* a *et* b $(a > b)$; *il est d'autre part attiré par le point* O *proportionnellement à sa masse et à sa distance* r *au point* O. (*On représentera par* $F = -m\alpha^2 r$ *cette force attractive.*)

1° *Étudier le mouvement du point* M *et déterminer la réaction* N *exercée à chaque instant par la courbe sur le point matériel* M.

2° Montrer que, si la réaction N est nulle à un instant, elle est nulle pendant tout le cours du mouvement.

3° Étudier en particulier le cas où les conditions initiales sont les suivantes :

$$x_0 = 0, \qquad y_0 = b, \qquad x'_0 = 2\sqrt{a^2 - b^2}, \qquad y'_0 = 0$$

(x et y désignant dans ces formules les coordonnées du point M).

Épreuve pratique. — *Quelle doit être la vitesse, au point le plus bas de sa trajectoire, d'un pendule simple pour que la tension du fil devienne nulle quand ce fil fait avec la verticale ascendante un angle de 45° ?*

A partir de l'instant où la tension est ainsi nulle, le mouvement du point devient parabolique ; déterminer le point où il rencontre l'horizontale du point d'attache du fil.

Données en unités C. G. S :

Longueur du pendule, $l = 87$;

Accélération de la pesanteur, $g = 980$.

(Juillet 1908.)

Grenoble.

Composition. — *Dans un plan vertical fixe,* P, *se trouvent deux tiges, rectilignes, homogènes, égales, de même masse,* AB *et* CD, *qui sont articulées en leur milieu* G. *Leurs extrémités* A *et* C *sont assujetties à rester sur une droite fixe* Ox. *Les liaisons sont sans frottement.*

On demande : 1° *de trouver le mouvement du système ;* 2° *de calculer les réactions exercées par* Ox *en* A *et* C ; 3° *de déterminer la réaction qui s'exerce en* G *sur la barre* AB.

On admettra qu'à l'instant initial G *est sur la perpendiculaire* Oy *à* Ox *menée par* O *en dessous de* Ox *et que le système part du repos.*

On appelle $2l$ *la longueur commune des barres,* m *leur masse,* α *l'angle de la verticale descendante avec* Ox, x *l'abscisse de* G, θ *l'angle de* AB *avec* Ox.

N. B. — On admettra que, si les barres se rencontrent,

elles peuvent se traverser mutuellement, de façon que le mouvement se continue sans choc.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un solide homogène* S, *de masse* M, *est limité extérieurement par un cylindre de révolution de hauteur h et de rayon* R.

Soient O *un point de l'une des bases situé à une distance* d ($d < R$) *de l'axe de révolution et* Ox, Oy, Oz *trois axes rectangulaires,* Oz *étant parallèle aux génératrices du cylindre,* Ox *rencontrant l'axe de révolution :*

1° *Former l'équation de l'ellipsoïde d'inertie de* S *relatif à* O.

2° *Soit* O′ *le point où* Oz *rencontre la seconde base. On suppose que* O *et* O′ *soient fixes et situés sur une même verticale et que* S *tourne uniformément autour de* OO′ *avec une vitesse angulaire* ω. *Déterminer les réactions exercées par* O *et* O′.

3° *Le solide étant animé du mouvement précédent, on lui applique, à un moment donné, et sans changer les liaisons, deux couples résistants* Γ, Γ' *dont les moments sont, en direction, parallèles à* Oz *et, en intensité, l'un* N *constant, l'autre proportionnel à la vitesse angulaire de rotation; le coefficient de proportionnalité étant* α. *Calculer* N *et* α *de façon que la vitesse angulaire soit* $\omega\varepsilon$ *au bout d'un temps* t_1 ($\varepsilon < 1$), *et que le solide s'arrête au bout du temps* $2t_1$.

(Juillet 1908.)

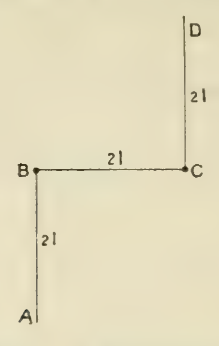
Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Extension du théorème des moments cinétiques et du théorème des forces vives au mouvement relatif d'un système matériel autour de son centre de gravité.*

II. *Une tige* BC *est articulée à ses extrémités avec deux autres tiges identiques* BA *et* CD. *Ces trois tiges homogènes et pesantes sont placées sur un plan horizontal, sur lequel elles peuvent glisser sans frottement.*

Initialement, AB *et* CD *sont perpendiculaires à* BC, *dans des sens opposés, et le système est au repos. On applique alors aux extrémités libres* A *et* D *deux percussions données formant un couple :*

1° *Calculer les percussions de réaction qui se produisent*



aux articulations B *et* C, *et déterminer la distribution des vitesses que ces percussions impriment aux barres.*

2° *Étudier le mouvement parallèle des barres.*

Épreuve pratique. — *Un parallélépipède rectangle homogène pesant a pour arêtes* $OA = 3^m$, $OB = 2^m$, $OC = 1^m$. *Il peut pivoter autour de l'arête horizontale fixe* OB. *Initialement, l'arête* OC *est dirigée suivant la verticale ascendante, puis le corps est abandonné sans vitesse. Calculer :*

1° *La longueur du pendule simple synchrone ;*

2° *La durée de l'oscillation ;*

3° *Le temps nécessaire pour que le plan* AOB *devienne vertical ;*

4° *La vitesse angulaire dans cette dernière position.*

(Juin 1908.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1954.

(1903, p. 147.)

Trois quadriques Q_1, Q_2, Q_3 *déterminent un réseau ponctuel de quadriques* Q. *Les polaires* D *d'une droite* Δ *par rapport aux surfaces* Q *appartiennent à une congruence :*

1° *Les droites de la congruence sont en général les cordes d'une cubique gauche* C.

2° *Lorsque* Δ *varie, les cubiques* C *rencontrent en huit points une courbe fixe.*

3° *Trouver la surface* S *lieu des droites* Δ *telles que les droites* D *passent par un point fixe, et la courbe lieu de ce point, quand* Δ, *variant, engendre la surface* S.

(R. Gilbert.)

SOLUTION

Par l'auteur.

1° Soient

$$f(x, y, z) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z) = 0,$$
$$\psi(x, y, z) = 0$$

les équations des quadriques Q_1, Q_2, Q_3. L'équation de Q est

$$\lambda f + \mu\varphi + \nu\psi = 0,$$

λ, μ, ν étant trois paramètres arbitraires.

Les plans polaires d'un point M par rapport aux quadriques Q passent par un point fixe M′, quand λ, μ, ν varient, puisque l'équation du plan polaire dépend linéairement de deux paramètres; les points M, M′ sont réciproques.

Soient D_1, D_2, D_3 les polaires de Δ par rapport à Q_1, Q_2, Q_3; supposons que M décrive Δ; les trois plans (M', D_1), (M', D_2), (M', D_3) se correspondent homographiquement deux à deux comme étant les plans polaires de M par rapport à Q_1, Q_2, Q_3. Donc le lieu du point M′ est une cubique gauche C dont D_1, D_2, D_3 sont trois cordes; et comme on peut prendre arbitrairement Q_1, Q_2, Q_3, dans le réseau, toutes les polaires D de Δ sont des cordes de la cubique C.

Ceci peut aussi se voir analytiquement. Soient x_0, y_0, z_0, t_0 et x_1, y_1, z_1, t_1 deux points, M_0 et M_1, de Δ. Leurs plans polaires par rapport à Q sont

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda(x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z + t_0 f'_t) \\ &\quad + \mu(x_0 \varphi'_x + y_0 \varphi'_y + z_0 \varphi'_z + t_0 \varphi'_t) \\ &\quad + \nu(x_0 \psi'_x + y_0 \psi'_y + z_0 \psi'_z + t_0 \psi'_t) = 0, \\ &\lambda(x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z + t_1 f'_t) \\ &\quad + \mu(x_1 \varphi'_x + y_1 \varphi'_y + z_1 \varphi'_z + t_1 \varphi'_t) \\ &\quad + \nu(x_1 \psi'_x + y_1 \psi'_y + z_1 \psi'_z + t_1 \psi'_t) = 0. \end{aligned}\right.$$

ce que nous écrirons, pour abréger,

$$(1)\qquad \begin{cases} \lambda R_0 + \mu S_0 + \nu T_0 = 0, \\ \lambda R_1 + \mu S_1 + \nu T_1 = 0. \end{cases}$$

et nous représenterons également par $R_{0,1}$, par exemple, l'expression

$$x_0 f'_{x_1} + y_0 f'_{y_1} + z_0 f'_{z_1} + t_0 f'_{t_1}.$$

Les polaires D de Δ sont définies par le système (1). Si l'on assujettit la droite D à passer par un point x, y, z, t donné, le système (1) donne les rapports des quantités λ, μ, ν. Toutefois il y a indétermination si le Tableau suivant est nul :

$$\begin{vmatrix} R_0 & S_0 & T_0 \\ R_1 & S_1 & T_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ces équations sont celles d'une cubique C; d'ailleurs, si Δ est prise arbitrairement, ses polaires sont toutes distinctes; donc on voit déjà que C est le lieu des points par lesquels passent une infinité de droites de la congruence des polaires. Soient ensuite x_2, y_2, z_2, t_2 et x_3, y_3, z_3, t_3 deux points, M_2 et M_3, pris sur une des droites D. On a

$$(2)\qquad \begin{cases} \lambda R_{0,2} + \mu S_{0,2} + \nu T_{0,2} = 0, \\ \lambda R_{0,3} + \mu S_{0,3} + \nu T_{0,3} = 0, \\ \lambda R_{1,2} + \mu S_{1,2} + \nu T_{1,2} = 0, \\ \lambda R_{1,3} + \mu S_{1,3} + \nu T_{1,3} = 0; \end{cases}$$

les coordonnées d'un point de D sont

$$(3)\qquad \begin{cases} x = m x_2 + n x_3, \\ y = m y_2 + n y_3, \\ z = m z_2 + n z_3, \\ t = m t_2 + n t_3. \end{cases}$$

et les équations de C sont

$$\alpha R_0 + \beta R_1 = 0,$$
$$\alpha S_0 + \beta S_1 = 0,$$
$$\alpha T_0 + \beta T_1 = 0.$$

Remplaçons x, y, z, t de (3) dans les équations de C afin de

voir s'il y a des points de D sur C. Nous obtenons ainsi trois équations en $\frac{m}{n}$ qui sont

$$\alpha m R_{0,2} + \alpha n R_{0,3} + \beta m R_{1,2} + \beta n R_{1,3} = 0,$$
$$\alpha m S_{0,2} + \alpha n S_{0,3} + \beta m S_{1,2} + \beta n S_{1,3} = 0,$$
$$\alpha m T_{0,2} + \alpha n T_{0,3} + \beta m T_{1,2} + \beta n T_{1,3} = 0.$$

Multiplions par λ, μ, ν et ajoutons en tenant compte des relations (2); on trouve une identité; donc les trois équations précédentes se réduisent à deux; elles déterminent les rapports $\frac{n}{m} = N$ et $\frac{\beta}{\alpha} = B$.

Les deux premières donnent

$$R_{0,2} + NR_{0,3} + BR_{1,2} + N.B.R_{1,3} = 0,$$
$$S_{0,2} + NS_{0,3} + BS_{1,2} + N.B.S_{1,3} = 0.$$

En éliminant B on a une équation du second degré en N, et, par suite, il y a deux points de D sur la cubique C.

2° et 3° Nous avons dit plus haut que les trois plans (M', D_1), (M', D_2), (M', D_3) se correspondent homographiquement; ceci suppose qu'ils sont déterminés, c'est-à dire que M' n'est pas à la fois sur D_1, D_2 et D_3. Cela peut arriver lorsque M décrit certaines droites, Δ, que nous désignerons uniquement désormais par Δ.

Le point M' décrit alors la courbe J, lieu des points tels que leurs plans polaires par rapport aux quadriques Q passent par une même droite Δ. On obtient, par un calcul immédiat, les équations de J en annulant le Tableau

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z & f_t \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z & \varphi_t \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z & \psi_t \end{vmatrix} = 0.$$

On obtiendrait la même courbe en cherchant le lieu des sommets des cônes du réseau. C'est la courbe jacobienne du réseau (Salmon, *Géométrie analytique à trois dimensions*, § 238, *a*). On voit sur ces équations que J est l'intersection de deux surfaces cubiques ayant en outre en commun une cubique gauche. On en conclut d'abord que J est du sixième ordre. De plus, on en conclut (Salmon, *Id.*, § 345, 346) que, si h est le

nombre des points doubles apparents de J, et r le degré de la développable lieu des tangentes, on a

$$h = 7, \qquad r = 16.$$

Des formules de Cayley pour les courbes gauches on déduit de là que la courbe J est de genre 3.

Ceci posé, nous allons montrer que toutes les cubiques C rencontrent J en huit points. En effet, les équations de J sont données par le Tableau (4); par des combinaisons faciles à vérifier on déduit des équations (4) les deux équations suivantes, où l'on a conservé les notations antérieures :

$$\begin{vmatrix} R_0 & S_0 & T_0 \\ R_1 & S_1 & T_1 \\ f'_z & \varphi'_z & \psi'_z \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} R_0 & S_0 & T_0 \\ R_1 & S_1 & T_1 \\ f'_t & \varphi'_t & \psi'_t \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui montre que C est, ainsi que J, située sur les deux surfaces cubiques représentées par ces équations et constitue, avec J, leur intersection. Si t est alors le nombre des points de rencontre de ces deux courbes, on a (SALMON, *Id.*, § 346) $t = 8$. Ainsi, les cubiques C, qui correspondent point par point à des droites, sont assujetties à huit conditions, puisqu'une cubique dépend de douze paramètres et une droite de quatre seulement. Ces conditions sont de rencontrer J huit fois.

Soit maintenant M un point de J; les plans polaires de M par rapport aux quadriques Q passent par une droite Δ. Il y a autant de droites Δ qui rencontrent une droite D prise arbitrairement que de points communs à J et à la cubique C qui correspond point par point à la droite D. Donc la surface S lieu des droites Δ est du huitième ordre.

Mais nous allons définir la surface S d'une façon plus précise en montrant que ce sont bien des droites Δ qui coupent J en trois points. Soient M un point de J et Δ la droite qui lui correspond. Le plan (M, Δ) coupe J en six points M, M', M'', M''', M^{iv}, M^{v}. Désignons par K le cône dont le sommet est un des six points et faisant partie du réseau. Le plan Π polaire de M par rapport au cône K passe par Δ. Il peut se présenter trois cas : 1° ou bien les plans Π et (M, Δ) sont distincts; soit K_1 un cône correspondant; 2° ou bien les deux plans sont confondus; soit K_2 un cône correspondant, le cône K_2 est alors tangent au plan (M, Δ) suivant la droite qui joint son sommet au

point M ; 3° ou bien un des plans est indéterminé, c'est le cas unique du cône de sommet M.

Or le plan (M, Δ) coupe les quadriques Q du réseau suivant des coniques formant un réseau ponctuel, et, comme le point M a même polaire, Δ, par rapport à toutes ces coniques, la courbe cayleyenne de ce réseau de coniques se décompose en le point M et une conique Σ ; le réseau a deux droites doubles, les tangentes menées de M à Σ; donc il y a deux cônes K_2 tangents au plan (M, Δ) suivant ces deux droites. Il reste alors trois cônes K_1 ; les plans polaires de M par rapport à ces trois cônes coupent le plan (M, Δ) suivant Δ, c'est-à-dire que ces trois cônes ont leurs sommets sur Δ, et la droite Δ coupe bien J en trois points.

On peut d'après cela vérifier d'une autre façon que la surface S est bien du huitième ordre. On démontre en effet (Salmon, *Id.*, § 471) que, si une courbe d'ordre m a h points doubles apparents, l'ordre de la surface engendrée par une droite qui rencontre trois fois la courbe est

$$(m-2)h - \frac{1}{6} m(m-1)(m-2);$$

et ici $m = 6$ et $h = 7$.

On peut vérifier que toute section plane de S est bien de genre 3. En effet, la projection de J sur un plan, le point de vue étant un point de J est une quintique qui a $\frac{4.3}{2} - 3 = 3$ points doubles, puisqu'elle est de genre 3. Donc par un point de J il passe trois droites Δ, c'est-à-dire que J est une courbe triple sur S; toute section plane de S admet donc six points triples, équivalents à dix-huit points doubles, et le genre de la section plane est $\frac{7 \times 6}{2} - 18 = 3$.

Cas particuliers intéressants. — I. Parmi les quadriques du réseau il y a un couple de plans. Alors l'intersection T des deux plans fait évidemment partie de J. Il reste une quintique gauche J. Prenons pour plans de coordonnées $x = 0$ et $y = 0$ les deux plans du couple; le Tableau (4) devient

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z & f_t \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z & \varphi'_t \\ y & x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Donc J est l'intersection de la quadrique

$$\begin{vmatrix} f'_z & f'_t \\ \varphi'_z & \varphi'_t \end{vmatrix} = 0$$

avec la surface cubique

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

en écartant la solution étrangère $f'_z = \varphi'_z = 0$.

On voit aussi que la droite T, $x = y = 0$, est sur la surface cubique. Donc elle coupe J aux deux points où elle coupe la quadrique.

Si l'on fait $x = y = 0$ dans les équations d'une cubique C trouvées antérieurement, ces équations se réduisent à une seule,

$$\begin{vmatrix} zf'_{z_0} + tf'_{t_0} & zf'_{z_1} + tf'_{t_1} \\ z\varphi'_{z_0} + t\varphi'_{t_0} & z\varphi'_{z_1} + t\varphi'_{t_1} \end{vmatrix} = 0,$$

qui montre que la droite T est une corde de toutes ces cubiques, qui rencontrent en outre J en six points.

La courbe J est d'ordre $m = 5$; en conservant les notations antérieures on trouve (Salmon, *Id.*, § 345, 346) $h = 4$ et $r = 12$, et l'on en conclut que J est de genre 2.

Le plan polaire d'un point M de J par rapport au couple de plans du réseau passe par T ; donc toutes les droites Δ coupent T, et la surface S est le lieu des droites Δ qui coupent T en un point et J en deux points. Pour obtenir la surface totale du huitième ordre, il faudrait joindre, à la surface S précédente, la quadrique lieu des intersections des plans polaires des points de T par rapport aux quadriques du réseau ; la surface S est donc du sixième ordre ; nous la retrouverons d'ailleurs plus loin.

Si d'un point de T on projette la courbe J sur un plan, on obtient une quintique à $h = 4$ points doubles : mais l'un d'eux est sur T ; il en reste trois autres : donc T est une droite triple de S. D'autre part, si par un point A de J et par T on fait passer un plan, il coupe J en cinq points, savoir : A, les deux points de T et deux autres points ; donc J est une courbe

de S. Le genre d'une section plane de S est donc

$$\frac{5.4}{2} - 3 - 5 = 2,$$

ce qui est bien le genre de J.

L'ordre de la surface engendrée par une droite rencontrant deux fois une courbe d'ordre m, ayant h points doubles apparents, et une fois une droite est (Salmon, *Id.*, § 470)

$$h + \frac{1}{2} m(m-1) = 4 + 10 = 14.$$

Mais ici il faut retrancher les deux cônes du quatrième ordre ayant J pour base commune et dont les sommets sont les points de rencontre de T avec J; l'ordre de s est $14 - 8 = 6$.

II. Parmi les quadriques du réseau se trouvent deux couples de plans. Soient T, T′ les droites d'intersection; prenons les quatre plans pour plans de coordonnées

$$x = 0,$$
$$y = 0$$

et

$$z = 0,$$
$$t = 0.$$

Les droites T, T′ font partie de la jacobienne, et il reste une quartique gauche dont les équations sont

$$\begin{vmatrix} f'_z & f'_t \\ t & z \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ y & x \end{vmatrix} = 0.$$

Les droites T, T′ coupent chacune J en deux points. Ce sont aussi des cordes communes à toutes les cubiques C qui rencontrent en outre J en quatre points.

Les droites Δ rencontrent J, T, T′ chacune en un point; la surface S qu'elles engendrent est du quatrième ordre et admet T, T′ comme droites doubles. Pour obtenir la surface totale du huitième ordre qui correspond à la jacobienne, il faut ajouter à la surface S les deux quadriques lieux des intersections des plans polaires des points de T et T′ par rapport aux quadriques du réseau.

III. Parmi les quadriques du réseau se trouvent trois couples de plans. Désignons par T_1, T_2, T_3 les trois droites d'intersection.

Ces trois droites font partie de la jacobienne et il reste une cubique gauche J; les droites T_1, T_2, T_3 coupent chacune J en deux points ; ce sont aussi des cordes communes à toutes les cubiques C qui rencontrent en outre J en deux points. A la cubique J correspond la quadrique S lieu des droites Δ qui rencontrent T_1, T_2, T_3. Pour obtenir la surface totale du huitième ordre il faut ajouter à cette quadrique trois autres quadriques lieux des intersections des plans polaires des points de T_1, T_2, T_3 par rapport aux quadriques du réseau.

IV. Parmi les quadriques du réseau se trouvent quatre couples de plans P_1, P'_1, ..., P_2, P'_2, ..., P_3, P'_3, ..., P_4, P'_4. Désignons par T_1, T_2, T_3, T_4 les quatre droites d'intersection.

Les cubiques C ont pour cordes communes T_1, T_2, T_3, T_4.

Ces quatre droites font partie de la jacobienne et il reste une courbe du second ordre composée, comme nous allons voir, de deux droites conjuguées par rapport à toutes les quadriques du réseau. Soit, en effet, Δ_1 une droite qui rencontre les quatre droites T en A_1, A_2, A_3, A_4. Le point A_4 étant sur T_4, ses plans polaires par rapport aux trois couples P_1, P'_1, ..., $P_2 P'_2$, ..., $P_3 P'_3$, ... passent par une même droite, Δ_2; mais ces plans polaires restent les mêmes lorque A_4 varie sur Δ_1; donc Δ_1, Δ_2 sont conjuguées par rapport à toutes les quadriques du réseau.

Lorsqu'un point M variable décrit une des droites T_1, T_2, T_3, T_4, ses plans polaires passent par une droite Δ qui rencontre les trois autres engendrant une quadrique. Les quatre quadriques ainsi obtenues passent par Δ_1 et Δ_2.

QUESTIONS.

2112. Les centres de courbure de l'ellipse les plus rapprochés du centre de la courbe sont ceux qui répondent aux points où la tangente fait le plus grand angle avec la tangente correspondante au cercle principal. (M. d'Ocagne.)

2113. Soit M le milieu du côté AB du carré ABCD. Si, par le sommet D on mène une droite quelconque qui coupe le côté BC en P et la droite CM en Q, les angles BAP et DBQ sont égaux. (M. d'Ocagne.)

[K'10c]

UNE QUESTION DE MAXIMUM
(Méthode synthétique);

Par M. Alessandro PADOA
(Genova, Italie).

Après plusieurs dizaines d'années, on peut encore regretter avec Steiner ([1]) que, dans l'étude des questions de *maximum* et de *minimum* qu'on rencontre en Géométrie, la *synthèse* ait été presque entièrement négligée pour la voie plus uniforme de l'*analyse*.

En effet, tandis qu'il y a bien des cas où les règles générales de l'analyse ne conduisent ni directement ni facilement au but, la synthèse nous aide à découvrir la liaison intime entre les propriétés des figures étudiées et nous offre des démonstrations d'une simplicité et d'une élégance très remarquables.

Mais, parmi ces démonstrations, il y en a qui peuvent être perfectionnées, tant au point de vue de la simplicité qu'à celui de la rigueur.

Ici, je m'occuperai seulement de la proposition 17 (p. 105) : *Entre toutes les figures planes isopérimètres, le cercle est le maximum.*

Steiner débute dans sa démonstration par les considérations suivantes :

Il est clair qu'il y a une infinité de figures d'un

([1]) *Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général* [Crelle's Journal, t. 24, Berlin, 1842. Premier Mémoire traduit de l'allemand en français par M. Wertheim, p. 93-152; second Mémoire (*id.*), par M. Fœlsing, p. 189-250].

périmètre donné qui ont diverses formes et diverses aires. On comprend de même que l'aire pourra devenir aussi petite qu'on voudra, mais non pas aussi grande qu'on voudra, puisqu'elle reste évidemment toujours comprise dans l'intérieur du cercle décrit d'un des points de son contour comme centre avec un rayon égal à la moitié du périmètre donné. Mais, puisque des figures de périmètre donné peuvent avoir différentes aires, sans pouvoir toutefois grandir indéfiniment, il faut qu'il ait entre elles une *figure maximum ou* plusieurs *maxima de différentes formes, c'est-à-dire plusieurs figures de différentes formes et d'une même aire, plus grande que celle des autres figures.*

Je remarque que la conclusion n'est pas conséquence nécessaire des considérations faites; celles-ci permettaient seulement d'affirmer *l'existence d'un* (ou de plusieurs) *maximum ou d'une limite supérieure* [1].

Or, comme pour la démonstration, que je vais transcrire, il faut admettre l'existence du maximum en question, en excluant par suite celle de la limite supérieure, je propose explicitement le *postulat :*

1° *Dans un ensemble de figures planes isopérimètres, il y en a une* (au moins) *dont l'aire est maximum* [2].

---

(1) En effet, les *prémisses* restent *vraies* (sauf la considération superflue *que l'aire pourra devenir aussi petite qu'on voudra*) si au lieu de *figures* on lit *polygones,* tandis qu'en ce cas la *conclusion* devient *fausse* (parce que les aires d'un ensemble de polygones isopérimètres, au lieu d'un *maximum*, ont une *limite supérieure :* l'aire du cercle isopérimètre aux polygones donnés). Ce qui prouve que *la conclusion n'est pas conséquence nécessaire des prémisses.*

(2) Sans ce postulat, ce qui suit ne démontre pas la proposi-

Voici la démonstration de Steiner [1] :

Soit α *une des figures maxima.*

A chaque point A *du périmètre correspond un second point* B, *placé de manière que ces deux points divisent le périmètre en deux parties* égales β_1 *et* β_2.

Alors la droite AB *divise la figure* α *en deux parties équivalentes* α_1 *et* α_2; *car, si l'une d'elles était plus grande que l'autre, on pourrait remplacer la seconde par une figure égale à la première, puisqu'elles sont isopérimètres et qu'elles ont la base* AB *en commun; l'aire de la figure entière* α *se serait ainsi accrue sans changer de périmètre, ce qui est contraire à l'hypothèse; donc les deux parties* α_1 *et* α_2 *doivent être équivalentes.*

Maintenant, soit C *un point quelconque de* β_1 (A *et* B *exclus*).

Si l'angle ACB *n'était pas droit, on pourrait agrandir l'aire du triangle* ACB *sans changer la longueur de ses côtés* AC *et* CB [2], *ce qui permettrait de conserver les parties de* α_1 *qui étaient appuyées sur ces côtés* [3]; *on obtiendrait ainsi une*

---

tion 17, mais seulement que, *si une figure plane est le maximum entre ses isopérimètres, elle est un cercle.*

Je ne crois pas qu'on puisse éviter ce postulat sans en admettre d'autres (car le concept général de *figure plane* n'appartient pas proprement à la Géométrie *élémentaire* traditionnelle) et sans compliquer la question, au lieu de la simplifier.

[1] Que j'abrège en y supprimant des considérations encombrantes qui nuisent à sa clarté.

[2] Ici l'auteur cite sa proposition 6 (p. 99) :

Entre tous les triangles construits avec deux côtés donnés, celui dans lequel ces deux côtés seront perpendiculaires l'un à l'autre sera un maximum.

[3] Ces parties étaient (et doivent être) placées hors du triangle; car, autrement, il aurait suffi de remplacer les parties en dedans

figure α'_1 *plus grande que* α_1, *dont le périmètre se composerait d'une ligne* de la même longueur que β_1 *et de la nouvelle base* A′B′. *Par suite, en remplaçant* α_2 *par la figure symétrique de* α'_1 (*par rapport à* A′B′), *l'aire de la figure totale deviendrait plus grande, sans que le périmètre changeât de longueur, ce qui est contraire à l'hypothèse.*

Puisque l'angle ACB *est droit quel que soit le point* C *de* β_1 (*ou de* β_2), *il s'ensuit que la figure en question est un cercle.*

Cette démonstration est très jolie; est-elle rigoureuse?

Certainement il faut être un peu raffiné pour ne pas être satisfait, dès le commencement, de la détermination du point B [1], d'autant plus que le raisonnement n'exige pas qu'on sache le *construire,* mais seulement qu'on admette qu'il *existe;* et tout le monde sera bien disposé à l'admettre. Cependant, puisque d'aucune proposition de la Géométrie élémentaire on ne saurait *déduire* l'existence du point B, lorsqu'il s'agit d'une ligne quelconque, il faudrait admettre cette *existence* moyennant un second *postulat.*

Mais nous allons voir qu'on peut s'en passer.

Lisons d'abord l'autre démonstration de la même proposition qu'on trouve dans le second Mémoire de Steiner (p. 197) et qui, elle aussi, suppose la proposition 1° :

---

par leurs symétriques (par rapport aux côtés AC ou CB) pour obtenir une figure isopérimètre à α et d'aire plus grande; ce qui est contraire à l'hypothèse.

[1] Dans la démonstration, le mot *égales,* que j'ai souligné, remplace la phrase *de même longueur;* mais qu'est-ce que *signifie* cette phrase, en Géométrie élémentaire, au sujet d'une ligne quelconque?

Si l'on imagine une figure curviligne quelconque, de périmètre donné, dont l'aire soit un maximum, on n'a qu'à y inscrire un quadrilatère quelconque ABCD; *si l'on regarde les côtés de ce quadrilatère et les parties de la figure qui se trouvent hors du quadrilatère comme constants, il faut que l'aire du quadrilatère soit un maximum; car, si son aire pouvait s'augmenter, l'aire de la figure entière s'augmenterait aussi, sans qu'il y eût changement de périmètre, ce qui serait contraire à l'hypothèse; mais* l'aire du quadrilatère n'est un maximum qu'autant que celui-ci est inscrit à un cercle; *il faut donc que les quatre points quelconques* A, B, C, D *du périmètre de la figure maxima se trouvent dans une circonférence, c'est-à-dire il faut que cette figure maxima soit un cercle.*

C'est plus court et le concept de *longueur* y est évité; malheureusement, cette démonstration est *illusoire*.

En effet, la proposition soulignée qu'on y emploie est un cas particulier de la proposition 25 I du premier Mémoire (p. 111) :

Un polygone de côtés a, b, c, ... donnés est un maximum lorsqu'il est inscriptible dans un cercle, que l'auteur donne comme *conséquence* immédiate d'un théorème *déduit* de la proposition 17!

*
* *

Voici ce que je propose :

D'abord, je dis que deux *lignes* sont *isomères* lorsqu'elles peuvent être décomposées en (un nombre fini de) parties respectivement égales (superposables); c'est une définition analogue à celle d'équivalence entre surfaces ou entre solides.

Soit β une ligne simplement fermée, isomère à une circonférence γ; soit A′B′ un diamètre de γ; soient A et B les points de β qui correspondent à A′ et B′ dans la correspondance isomérique entre β et γ.

Alors A et B divisent β en deux parties isomères β_1 et β_2, ce qui permet de compléter la *première* démonstration de Steiner [1], en se passant du second *postulat*.

Ainsi l'on ne démontre pas encore la proposition 17, mais seulement que :

2° *Entre les figures planes isomères à un cercle* (c'est-à-dire dont le contour est isomère à une circonférence), *celui-ci est le maximum* (c'est-à-dire est la seule figure dont l'aire est maximum).

Maintenant, soient P et P′ deux polygones convexes dont les côtés sont respectivement égaux et dont P seulement est inscrit dans une circonférence que nous appellerons γ.

Si nous appuyons sur les côtés de P′, en dehors, les petits segments de cercle compris entre P et γ, nous obtiendrons une figure plane dont le contour est isomère à γ, sans être égal à γ.

Pour la proposition 2°, l'aire de cette figure est moindre que celle du cercle γ; en retranchant les segments de cercle considérés, il s'ensuit que $P' < P$. Ainsi nous avons démontré que :

3° *Entre tous les polygones de côtés donnés, le polygone convexe inscrit dans une circonférence est le maximum* [2],

c'est-à-dire la proposition 25 I de Steiner.

---

(1) On y remplacera la phrase soulignée *de la même longueur que* par *isomère à*.

(2) Nous nous sommes occupés seulement de polygones *convexes;* mais il est clair que l'aire d'un polygone *concave* ne pourrait pas

Après quoi, celle que Steiner a donnée comme *seconde* démonstration de la proposition 17 *cesse d'être illusoire.*

En résumé, pour donner plus de rigueur aux raisonnements de Steiner en conservant leur belle simplicité, il suffit d'admettre mon postulat 1°, de modifier un peu le commencement de sa *première* démonstration pour en tirer d'abord la proposition 2°, dans laquelle j'ai introduit le concept de *lignes isomères,* et de déduire de celle-ci la proposition 3° qui permet enfin de démontrer la proposition 17 moyennant la *seconde démonstration de* Steiner.

[I23a]

CONTINUANTS : APPLICATIONS A LA THÉORIE DES NOMBRES;

Par M. A. DELTOUR.

(SUITE.)

CONGRUENCES.

87. *Objet et définitions.* — Lorsque les valeurs des continuants, des adjoints et de leurs éléments sont déterminées par des congruences et exprimées par des nombres congrus suivant un certain module, les procédés de transformation employés jusqu'ici subsistent encore.

être un *maximum* entre celles de tous les polygones isopérimètres.

En effet, chaque polygone concave a une diagonale HK (au moins) hors du polygone; or, il suffit de tourner l'une des parties du contour, dont les extrêmes sont H et K, autour de la droite HK, pour augmenter l'aire du polygone donné sans changer son périmètre.

Il faut y ajouter ceux qui reposent sur l'existence de continuants définis comme les unitaires (n° 75), à cela près que les égalités sont remplacées par des congruences.

Ces continuants ainsi que leurs adjoints et les suites d'éléments qui les constituent seront dits unitaires par congruences ou, par abréviation, *unitaires congr.*

Il est évident que les unitaires (n° 75) sont des unitaires congr. par rapport à tous les modules.

Nous nous occuperons d'abord du mode de formation de ces unitaires congr., puis de leur application à la transformation des continuants ou des adjoints dont les valeurs sont définies par des congruences.

L'indication du module (mod t), à la suite des congruences, sera supprimée lorsqu'il n'y aura pas ambiguïté.

88. *Unitaires congr.* — Malgré la similitude des définitions des deux sortes d'unitaires et l'analogie de propriétés qui en résulte, certaines différences sont à noter.

Ainsi les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un continuant (λ) soit unitaire sont, comme on sait,

$$(\lambda_{0,1}) = (\lambda_{1,0}) = 0,$$

puisque la relation (VI) donne

$$(\lambda)(\lambda_{1,1}) = \pm 1.$$

Mais pour que (λ) soit unitaire congr., les conditions semblables

$$(\lambda_{0,1}) \equiv (\lambda_{1,0}) \equiv 0$$

doivent être complétées par l'une des congruences

$$(\lambda) \equiv \pm 1, \qquad (\lambda_{1,1}) \equiv \pm 1.$$

89. — Les propositions suivantes, dont il suffit de donner l'énoncé, s'établissent par des moyens analogues à ceux employés au n° 31 :

I. *Le nombre congru à la valeur absolue d'un continuant ou d'un adjoint n'est pas modifié par l'introduction d'une suite unitaire congr. entre deux éléments (Syst. alt.)*

Le facteur par lequel la valeur relative est multipliée est ± 1, $\pm i$, suivant le type auquel appartient la suite.

II. *Toute permutation circulaire d'un unitaire congr. forme un unitaire congr. de même type (Syst. alt.).*

En outre, on remarquera que, si (λ) est un unitaire congr., $(-\lambda)$ l'est aussi.

90. — *Si*

$$(\lambda) = (a, \alpha, b, \beta)$$

est un unitaire congr. et si l'on pose

$$(\lambda) \equiv ui^{n_\lambda^2} \equiv u_1 \qquad (\text{pour } u = \mp 1),$$

on a la relation (Syst. alt.)

$$u_1[-1]^{n_\alpha}(\alpha) \equiv (\beta).$$

En effet, (β) peut s'écrire

$$(\beta) = (0, -b, -\underline{\alpha}, -a, 0, a, \alpha, b, \beta$$

et devient, par suppression de la suite λ,

$$\begin{aligned}(\beta) &\equiv u_1(0, -b, -\underline{\alpha}, -a, 0) \\ &\equiv u_1[-1]^{n_\alpha}(\alpha).\end{aligned}$$

Cette relation prend une forme symétrique par rapport à α et β.

Elle peut, en effet, s'écrire, en remplaçant n_λ par $n_\alpha + n_\beta + 2$ dans l'expression de u_1,

$$(C_1) \qquad u[-1]^{n_\alpha n_\beta} i^{3n_\alpha^2}(\alpha) \equiv i^{3n_\beta^2}(\beta).$$

(α), (β) étant écrits dans le système alterné, les quantités $i^{3n_\alpha^2}(\alpha)$, $i^{3n_\beta^2}(\beta)$ sont réelles (n° 30, *remarque*).

Remarque. — Comme conséquence de la deuxième proposition du n° 89, on a une relation semblable pour toutes les combinaisons a, b distinctes qu'on peut former avec les éléments de λ pris deux à deux.

91. *Lorsqu'une suite d'éléments α est telle que le plus grand commun diviseur* S, *pris en valeur absolue, de (α) et du module t divise $(\alpha_{1,0}) - u_1$*

$$(u_1 = u i^{(n_\alpha - 1)^2};\ u = \pm 1),$$

on peut former un unitaire congr. de S *manières différentes en ajoutant à α trois nouveaux éléments* (*Syst. alt.*).

Cherchons à déterminer b_1, b_2, b_3 de telle sorte que

$$(\lambda) = (b_1, b_2, b_3, \alpha)$$

soit un unitaire congr.

Ces quantités doivent remplir les trois conditions

$$(b_1, b_2, b_3, \alpha_{0,1}) \equiv 0, \qquad (b_2, b_3, \alpha) \equiv 0,$$
$$(\lambda) \equiv (b_3, \alpha) \equiv u_1.$$

Il résulte de l'hypothèse que la dernière congruence qui s'écrit

$$(b_3)(\alpha) - (\alpha_{1,0}) - u_1 \equiv 0$$

est satisfaite pour S valeurs de b_3 distinctes. Soit b_3 l'une d'elles.

La deuxième devient alors

$$(b_2)u_1 - (\alpha) \equiv 0$$

et donne la valeur de b_2.

Pour déterminer b_1, on déduit de la relation (VI) appliquée à (b_2, b_3, α)

$$u_1(b_2, b_3, \alpha_{0,1}) \equiv [-1]^{n_\alpha - 1}.$$

Par suite, la première congruence devient

$$[-1]^{n_\alpha - 1}(b_1) + u_1(b_3, \alpha_{0,1}) \equiv 0$$

et donne la valeur de b_1.

92. *Avec une suite quelconque d'éléments β on peut toujours former un unitaire congr. en ajoutant quatre éléments (Syst. alt.).*

En effet, pour que

$$(\lambda) = (a_1, a_2, a_3, a_4, \beta)$$

soit un unitaire congr., il suffit (n° 91) que le plus grand commun diviseur S, en valeur absolue, de (a_4, β) et du module t divise

$$(\beta) - u_1 \qquad [u_1 = ui^{n_\beta^2}, \ u = \pm 1];$$

en d'autres termes, que a_4 admette au moins une valeur telle que cette condition soit satisfaite.

Donnons à a_4 la composition suivante :

$$a_4 = \text{APQ},$$

dans laquelle :

A représente un nombre premier avec t;

P, un produit formé avec tous les facteurs premiers

de t qui n'appartiennent pas à $(\beta_{1,0})$, affectés d'exposants quelconques, $\geqq 0$ si ces facteurs appartiennent aussi à (β), > 0 dans le cas contraire;

Q, un produit formé avec tous les facteurs communs à t, $(\beta_{1,0})$, $(\beta) - u_1$, affectés d'un exposant plus petit que ceux qu'ils ont dans chacun des deux derniers nombres.

Dans l'égalité

$$(a_4, \beta) = (a_4)(\beta) + (\beta_{1,0}),$$

tout facteur de t premier avec Q divise une seule des deux parties du second nombre et, par suite, est premier avec (a_4, β).

Tout facteur de Q entre dans (a_4, β) avec l'exposant qu'il a dans Q et qui est plus petit que dans $(\beta) - u_1$.

Pour une telle valeur de a_4, la question se trouve par conséquent résolue, puisque le plus grand commun diviseur S de (a_4, β) et de t n'est autre que Q et divise $(\beta) - u_1$.

93. *Cas particuliers. Unitaires congr.* (λ) *pour lesquels* $n_\lambda \leqq 5$ (*Syst. alt.*). — On trouve facilement que :

1° Les seuls unitaires congr. composés de *deux* ou de *trois* éléments sont les unitaires (0, 0), (1, 1, 1), (—1, —1, —1).

2° Ceux de *quatre* éléments sont de l'une des deux formes suivantes :

$$(a,\ b,\ -a,\ -b) \quad \text{avec} \quad ab \equiv 0,$$
$$(a,\ b,\ \ a,\ \ b) \quad \text{avec} \quad ab \equiv 2.$$

Ces unitaires congr. se ramènent d'ailleurs par trans-

formation (T_{10}) (n° 16) aux unitaires

$$(0, m, 0, -m),$$
$$(1, 2, 1, -2).$$

3° Ceux de *cinq* éléments sont de l'une des trois formes suivantes :

$$(a, a, a, a, a),$$
$$(a, a, b, c, b),$$
$$(a, b, c, d, e),$$

les éléments a, b, c, d, e n'étant pas congrus entre eux.

Si l'on représente l'un de ces unitaires congr. par $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, la relation (C_4) (n° 90) montre que les éléments sont liés par cinq congruences semblables à celle-ci :

$$a_2 \equiv u(-a_4 a_5 + 1).$$

Lorsque tous les éléments sont égaux, c'est le cas de la première forme ; on a

$$a \equiv u(-a^2 + 1),$$

d'où

$$(2a + u)^2 \equiv 5.$$

5 est résidu quadratique du module.

Soit, par exemple, $t = 41$.

$$(6, 6, 6, 6, 6),$$
$$(5, 5, 7, 17, 7),$$
$$(4, 7, 32, 14, 23)$$

sont des unitaires congr. (mod 41).

Remarque. — Les unitaires congr. dont certains éléments sont égaux à 0, ± 1 se réduisent à de plus simples par les procédés précédemment indiqués.

94. *Réduction des continuants et des adjoints*

(*Syst. alt.*). — Il reste à montrer comment s'opère la réduction d'un continuant quelconque, c'est-à-dire sa transformation en un autre de valeur absolue congrue à celle du premier et composé avec un nombre moindre d'éléments.

La même opération s'applique aussi aux adjoints.

Soit (α, β, γ) le continuant donné, dans lequel β est composé de trois éléments au moins.

Formons, comme au n° 92, au moyen de cette suite, un unitaire congr. $(\lambda) = (a_1, a_2, a_3, a_4, \beta)$.

On peut écrire

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, 0, -a_4, -a_3, -a_2, -a_1, 0, a_1, a_2, a_3, a_4, \beta, \gamma),$$

et, en supprimant λ, on a

$$(\alpha, \beta, \gamma) \equiv u_1(\alpha, 0, -a_4, -a_3, -a_2, -a_1, 0, \gamma).$$

Ce dernier continuant est congru au premier en valeur absolue et contiendra moins d'éléments que lui après élimination des deux zéros.

Remarques. — 1° La réduction s'obtient encore par un procédé semblable lorsque β est composé seulement de deux éléments et appartient à une suite unitaire congr. de cinq éléments.

2° Lorsque le continuant donné est (β) $(\alpha, \gamma$ s'évanouissant), sa valeur absolue se réduit à un nombre congru à (a_2, a_3), ainsi qu'il résulte de la dernière congruence.

Cette relation est aussi une conséquence de la formule (C_1) (n° 90), puisque $(a_1, a_2, a_3, a_4, \beta)$ est un unitaire congr.

Elle pourrait être prise comme point de départ pour la recherche des éléments a_1, a_2, a_3, a_4 qui, joints à une suite donnée β, forment un unitaire congru.

(*A suivre.*)

NOTE AU SUJET DE LA COMPOSITION DE MÉCANIQUE DU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1908;

Par M. le Comte de SPARRE.

La question de Mécanique pour cette année au concours d'agrégation soulève, au sujet de la théorie du frottement, certaines questions qu'il me paraît intéressant de signaler. Ainsi qu'on le verra en effet, dans un cas particulier ce problème conduit à une indétermination apparente, non dans une question de mouvement, comme dans les problèmes signalés par M. Painlevé, mais dans une question d'équilibre.

Je rappelle l'énoncé des deux premières parties du problème, qui sont les seules dont j'aurai à m'occuper :

On considère dans un plan vertical deux droites indéfinies se coupant en un point O, *l'une* $x'Ox$ *horizontale, l'autre* $z'Oz$ *verticale. Une tige* AB *homogène pesante d'épaisseur négligeable, de longueur* $2l$ *et de masse* M, *est telle que ses extrémités restent constamment l'une* A *sur* $x'Ox$, *l'autre* B *sur* Z'OZ *et puissent passer sur ces droites d'un côté à l'autre du point* O. *Un point particulier* D *de la tige, dont les distances aux extrémités* A *et* B *restent invariables, est attiré par le point* O *proportionnellement à la distance ; la valeur absolue de la force qui le sollicite est représentée par* $\frac{Mg}{4\lambda}$ OD, g *désignant l'accélération de la pesanteur et* λ *un nombre positif inférieur à* l. *On appelle* C *le milieu de la tige*

et a le segment CD *compté positivement dans le sens* CA; *enfin on désigne par* θ *l'angle que forme la droite* OC *avec la verticale descendante.*

1° *On suppose que les liaisons auxquelles est soumise la tige* AB *soient sans frottement; on demande de déterminer les positions d'équilibre de cette tige et de rechercher parmi ces positions celles pour lesquelles l'équilibre est stable.*

2° *On suppose plus généralement que les droites* $x'Ox$, $z'Oz$ *soient dépolies, et que les coefficients de frottement de la tige sur ces droites soient très petits.*

On demande de déterminer, en fonction des données et de ces coefficients de frottement, une valeur approchée des angles θ *correspondant aux limites des régions dans lesquelles peut être placée la tige sans que l'équilibre cesse de subsister.*

Lorsque les liaisons sont sans frottement on a, pour la fonction des forces,

$$U = Mgl\cos\theta - \frac{1}{2}\frac{Mg}{4\lambda}\overline{OD}^2.$$

Mais dans le triangle OCD, où l'angle C est égal à 2θ (¹), on a

$$\overline{OD}^2 = l^2 + a^2 - 2al\cos 2\theta,$$

de sorte qu'en négligeant la constante

$$U = Mgl\left(\cos\theta - \frac{a}{4\lambda}\cos 2\theta\right).$$

Les positions d'équilibre sont donc données par l'équation

$$\frac{dU}{d\theta} = -Mgl\sin\theta\left(1 + \frac{a}{\lambda}\cos\theta\right) = 0,$$

(¹) Si la tige est au-dessous de Ox et à $2\pi - 2\theta$ si elle est au-dessus.

les positions d'équilibre stable correspondant aux points pour lesquels U est maximum.

On voit alors de suite que la discussion se résume dans le Tableau suivant, où pour $|a| > \lambda$ on pose

$$\cos\theta_1 = -\frac{\lambda}{a}$$

et où de plus on ne considère que les valeurs de θ comprises entre o et π, puisqu'à toute position d'équilibre située à droite de Z′OZ en correspond évidemment une symétrique située à gauche.

1° $a < -\lambda$:

$\theta = 0$, équilibre instable;
$\theta = \theta_1$, équilibre stable;
$\theta = \pi$, équilibre instable.

2° $-\lambda \leqq a \leqq \lambda$:

$\theta = 0$, équilibre stable;
$\theta = \pi$, équilibre instable;

3° $a > \lambda$:

$\theta = 0$, équilibre stable;
$\theta = \theta_1$, équilibre instable;
$\theta = \pi$, équilibre stable.

Passons maintenant à la seconde question.

Soit Z la composante normale à Ox de la réaction en A; la composante tangentielle de cette réaction sera $\varepsilon f Z$ où f est le coefficient de frottement et où $\varepsilon = \pm 1$, le signe devant être choisi de telle façon que

$$\varepsilon Z > 0$$

si le mouvement de A se fait dans le sens négatif, et qu'au lieu de cela

$$\varepsilon Z < 0$$

si le déplacement de A se fait dans le sens positif [1]; de même soient X la composante normale de la réaction de Z'OZ en B et $-\varepsilon' f' X$ la composante tangentielle de cette réaction où f' est le coefficient de frottement de Z'OZ et $\varepsilon' = \pm 1$, le signe devant être choisi de façon que

$$\varepsilon' X > 0$$

si le mouvement de B se fait dans le sens positif, et qu'au lieu de cela

$$\varepsilon' X < 0$$

si le déplacement de B sur $x'Ox$ se fait dans le sens négatif.

Remarquons de plus que, par suite des conditions géométriques pour

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2},$$

donc si la droite AB est au-dessous de $x'Ox$, le déplacement de B a lieu dans le sens positif si celui de A a lieu dans le sens négatif; on doit donc avoir

$$\varepsilon\varepsilon' Z X > 0.$$

Si au lieu de cela

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi,$$

donc si la tige AB est au-dessus de $x'Ox$, le déplacement de B a lieu dans le sens négatif sur Z'OZ lorsque le déplacement de A a lieu dans le sens négatif sur $x'Ox$; on a donc

$$\varepsilon\varepsilon' Z X < 0.$$

---

[1] Comme nous l'avons dit précédemment, nous supposons AB à droite de Z'OZ et par suite θ compris entre 0 et π; de plus, nous supposons OZ dirigé suivant la verticale descendante.

Ceci posé, nous obtiendrons les équations d'équilibre de la barre en écrivant que la résultante de translation des forces et la somme de leurs moments par rapport à O sont nuls, ce qui nous donnera

$$(1)\qquad X - \frac{Mg}{4\lambda}(l+a)\sin\theta + f\varepsilon Z = 0.$$

$$(2)\qquad Z + Mg - \frac{Mg}{4\lambda}(l-a)\cos\theta - f'\varepsilon' X = 0.$$

$$(3)\qquad 2lZ\sin\theta - 2lX\cos\theta - Mgl\sin\theta = 0.$$

On tire alors de (1) et (2)

$$(4)\quad X(1+ff'\varepsilon\varepsilon') = Mg\left[\frac{l+a}{4\lambda}\sin\theta + f\varepsilon\left(1 - \frac{l-a}{4\lambda}\cos\theta\right)\right].$$

$$(5)\quad Z(1+ff'\varepsilon\varepsilon') = Mg\left(\frac{l+a}{4\lambda}f'\varepsilon'\sin\theta \quad 1 - \frac{l-a}{4\lambda}\cos\theta\right).$$

et, en portant ces valeurs dans (3), divisant par Mgl et changeant le signe, on aura

$$(6)\quad \sin\theta\left(1 + \frac{a}{\lambda}\cos\theta\right) + 2f\varepsilon\left(1 - \frac{l-a}{4\lambda}\cos\theta\right)\cos\theta$$
$$- \frac{l+a}{2\lambda}f'\varepsilon'\sin^2\theta - ff'\varepsilon\varepsilon'\sin\theta = 0.$$

Puisqu'on suppose les coefficients de frottement très petits, il existera, sauf des cas exceptionnels, dans le voisinage de chaque position d'équilibre correspondant au cas où il n'y a pas de frottement, une région plus ou moins étendue de part et d'autre de cette position où le système sera encore en équilibre par suite du frottement.

Comme nous supposons f et f' très petits, nous négligerons (sauf le cas où les termes du premier degré par rapport à ces quantités disparaîtraient) les termes qui les contiendront au second degré.

1° *Positions d'équilibre dans le voisinage de* $\theta = 0$.

— Si dans (6) nous négligeons les termes du troisième degré en f et f', nous aurons

$$\theta\left(1 - \frac{a}{\lambda}\right) + 2f\varepsilon\left(1 - \frac{l-a}{4\lambda}\right) = 0.$$

Donc, en supposant

$$a + \lambda \neq 0,$$

$$\theta = f\varepsilon\,\frac{l - a - 4\lambda}{2(a - \lambda)};$$

d'ailleurs, comme nous supposons que nous ne considérons que les valeurs positives de θ, nous pourrons prendre, pour la limite de la région d'équilibre,

$$\theta = \alpha = \left|\frac{l - a - 4\lambda}{2(a + \lambda)}\right| f.$$

La région d'équilibre s'étendra alors de $\theta = \alpha$ à $\theta = -\alpha$.

Remarquons de plus que ε doit, d'après ce qui précède, avoir le signe de

$$\frac{l - a - 4\lambda}{a + \lambda}.$$

On a d'ailleurs pour Z dans ce cas, en se bornant à la partie principale,

$$Z = Mg\,\frac{l - a - 4\lambda}{4\lambda},$$

et par suite εZ aura le signe de $a + \lambda$.

Donc le point A tend à se déplacer dans le sens négatif si

$$a > -\lambda,$$

c'est-à-dire si $\theta = 0$ correspond à une position d'équilibre stable (pour le cas où il n'y a pas de frottement). Il tend au lieu de cela à se déplacer dans le sens positif

si

$$a < -\lambda;$$

donc si $\theta = 0$ correspond, pour le cas où il n'y a pas de frottement, à une position d'équilibre instable.

Ce fait pouvait être regardé comme évident *a priori*. Nous avons dû toutefois dans ce qui précède supposer

$$a + \lambda > 0.$$

Supposons maintenant

$$a = -\lambda.$$

L'équation (6) deviendra

$$(7)\quad \sin\theta(1 - \cos\theta) + 2f\varepsilon\,\frac{4\lambda - (l - \lambda)\cos\theta}{4\lambda}\cos\theta - \frac{l - \lambda}{2\lambda}f'\varepsilon'\sin^2\theta - ff'\varepsilon\varepsilon'\sin\theta = 0.$$

On est conduit à distinguer deux cas :

$$4\lambda - (l - \lambda) \gtrless 0 \qquad \text{ou} \qquad l \lessgtr 3\lambda.$$

On aura alors, en réduisant l'équation (7) à sa partie principale,

$$\theta^3 = -f\varepsilon\,\frac{3\lambda - l}{\lambda}$$

ou, comme nous nous bornons aux valeurs positives de θ,

$$\theta^3 = \frac{|l - 3\lambda|}{\lambda}f.$$

Nous avons d'ailleurs dans le cas actuel, pour la valeur principale de Z,

$$Z = Mg\,\frac{l - 3\lambda}{4\lambda},$$

et par suite εZ sera toujours positif, résultat qu'on

pouvait prévoir puisque, lorsqu'il n'y a pas de frottement, l'équilibre pour $\theta = 0$ est stable.

2° Supposons maintenant

$$l = 3\lambda$$

ou, plus généralement, supposons

$$a = l - 4\lambda,$$

l étant quelconque; l'équation (6) se réduira alors à

$$\sin\theta\left(1 + \frac{l-4\lambda}{\lambda}\cos\theta\right) + 4f\varepsilon\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta$$
$$- \frac{l-2\lambda}{\lambda}f'\varepsilon'\sin^2\theta - ff'\varepsilon\varepsilon'\sin\theta = 0$$

ou

$$2\sin\frac{\theta}{2}\left[\left(1 + \frac{l-4\lambda}{\lambda}\cos\theta\right)\cos\frac{\theta}{2} + 2f\varepsilon\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta\right.$$
$$\left. - 2\frac{l-2\lambda}{\lambda}f'\varepsilon'\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} - ff'\varepsilon\varepsilon'\cos\frac{\theta}{2}\right] = 0.$$

On a donc d'abord la racine $\theta = 0$ et de plus ce sera, si

$$l > 3\lambda,$$

la seule racine de l'équation précédente voisine de zéro.

On voit donc que dans ce cas, bien qu'il y ait frottement, il n'y a qu'une position unique d'équilibre et non pas une région d'équilibre, ainsi que cela a généralement lieu lorsqu'il y a frottement; il est d'ailleurs bien facile d'expliquer ce fait en remarquant que Z est nul pour

$$a = l - 4\lambda \quad \text{et} \quad \theta = 0,$$

de sorte que la force de frottement $Zf\varepsilon$ est aussi nulle dans ce cas.

Nous allons voir toutefois que si, en général, il y a une

position unique d'équilibre pour $\theta = 0$, $a = l - 4\lambda$, il n'en sera pas toujours ainsi. Supposons en effet qu'on ait

$$a = -\lambda \quad \text{et} \quad l = 3\lambda ;$$

l'équation (7) se réduira à

$$4 \sin\frac{\theta}{2}\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + f\varepsilon \sin\frac{\theta}{2}\cos\theta - f'\varepsilon' \sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{ff'\varepsilon\varepsilon'}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) = 0.$$

Si nous réduisons cette équation à sa partie principale, elle deviendra

$$(8) \qquad \theta[\theta^2 - 2(f'\varepsilon' - f\varepsilon)\theta - 2ff'\varepsilon\varepsilon'] = 0.$$

Nous avons d'abord la racine $\theta = 0$ qui correspond à la position d'équilibre unique lorsqu'il n'y a pas de frottement; mais, bien que le frottement soit nul pour $\theta = 0$, il y a dans ce cas particulier une région d'équilibre, de part et d'autre de ce point, due au frottement.

L'équation (8) en effet, en dehors de la racine $\theta = 0$, a deux autres racines très petites, devenant nulles l'une et l'autre pour

$$f = f' = 0,$$

et qui donnent par suite une région où le système est en équilibre.

Toutefois les deux racines sont toutes deux très petites, et elles s'annulent également l'une et l'autre pour $f = f' = 0$; il semble donc y avoir indétermination, mais il est facile de la lever.

Ces deux racines sont d'ailleurs, en remarquant que $\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = 1$,

$$\alpha_1 = f'\varepsilon' - f\varepsilon + \sqrt{f^2 + f'^2},$$
$$\alpha_2 = f'\varepsilon' - f\varepsilon - \sqrt{f^2 + f'^2}.$$

On peut d'ailleurs supposer toujours, ainsi que nous l'avons fait remarquer, les signes de ε et ε' choisis de telle façon que α_1 et α_2 soient positifs. Nous avons de plus dans le cas actuel, en nous bornant à la partie principale,

$$X = \frac{Mg\theta}{2}, \qquad Z = \frac{Mg\theta}{2}(f'\varepsilon' - \theta).$$

Puisque nous supposons toujours θ positif, on a

$$X > 0.$$

Comme d'ailleurs les conditions géométriques imposent dans le cas actuel, ainsi que nous l'avons vu,

$$\varepsilon\varepsilon' Z X > 0,$$

nous devrons donc avoir

$$(9) \qquad \varepsilon\varepsilon' Z > 0.$$

Considérons maintenant d'abord la racine α_1; nous aurons pour cette racine

$$Z = \frac{Mg\alpha_1}{2}(f'\varepsilon' - \alpha_1) = -\frac{Mg\alpha_1}{2}\left(\sqrt{f^2 + f'^2} - f\varepsilon\right) < 0.$$

On doit donc avoir, en vertu de la relation (9),

$$(10) \qquad \varepsilon\varepsilon' < 0.$$

De plus, ainsi que nous l'avons fait remarquer, les signes de ε et ε' doivent pouvoir être choisis de telle façon que α_1 soit positif.

Ceci exigera, à cause de (10), qu'on prenne

$$\varepsilon' = 1, \qquad \varepsilon = -1;$$

on aura alors

$$\alpha_1 = f' + f + \sqrt{f^2 + f'^2},$$

$$X = \frac{Mg\alpha_1}{2}, \qquad Z = -\frac{Mg\alpha_1}{2}\left(\sqrt{f^2 + f'^2} + f\right).$$

Considérons ensuite la racine α_2 ; nous aurons alors

$$Z = \frac{M g \alpha_2}{2} \left[\sqrt{f'^2 - f^2} + f \varepsilon \right] > 0,$$

et (9) donne alors

$$\varepsilon \varepsilon' > 0. \tag{11}$$

Mais, si ε et ε' satisfont à la relation (11), α_2 ne peut être positif et par suite cette racine doit être rejetée.

Nous voyons donc que dans ce cas de

$$a = -\lambda, \qquad l = 3\lambda,$$

bien que toutes les réactions soient nulles pour $\theta = 0$ (qui correspond à une position d'équilibre stable lorsqu'il n'y a pas de frottement), on a par suite du frottement une région d'équilibre s'étendant de

$$\theta = \alpha_1 \qquad \text{à} \qquad \theta = -\alpha_1,$$

de sorte que l'indétermination qui semble résulter des trois racines 0, α_1 et α_2 de l'équation (8) n'est qu'apparente et qu'on n'a en réalité qu'une solution. De plus, dans le cas actuel $\varepsilon Z > 0$ et $\varepsilon' X > 0$, et le frottement est dirigé dans un sens tel que θ tend à décroître, ce qui devait être puisque, lorsqu'il n'y a pas de frottement, la position $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable.

3° Cherchons maintenant la région d'équilibre dans le voisinage de $\theta = \pi$.

Posons pour cela

$$\theta = \pi - \alpha,$$

où nous pouvons, pour la raison de symétrie déjà donnée, supposer α positif.

Les équations (4), (5), (6) deviennent alors

$$(4') \quad X(1 + ff'\varepsilon\varepsilon') = Mg\left[\frac{l-a}{4\lambda}\sin\alpha + f\varepsilon\left(1 + \frac{l-a}{4\lambda}\cos\alpha\right)\right],$$

$$(5') \quad Z(1 + ff'\varepsilon\varepsilon') = Mg\left(\frac{l+a}{4\lambda}f'\varepsilon'\sin\alpha - 1 - \frac{l-a}{4\lambda}\cos\alpha\right),$$

$$(6') \quad \sin\alpha\left(1 - \frac{a}{\lambda}\cos\alpha\right) - 2f\varepsilon\left(1 + \frac{l-a}{4\lambda}\cos\alpha\right)\cos\alpha - \frac{l+a}{2\lambda}\varepsilon' f'\sin^2\alpha - ff'\varepsilon\varepsilon'\sin\alpha = 0.$$

Si

$$a \gtrless \lambda,$$

on aura alors, en se bornant à la partie principale,

$$\alpha = \frac{4\lambda + l - a}{2(\lambda - a)} f\varepsilon,$$

$$Z = -Mg\frac{l - 4\lambda - a}{4\lambda};$$

d'ailleurs

$$a < l,$$

de sorte que

$$4\lambda + l - a > 0,$$

et, en choisissant ε de façon que α soit positif, on a

$$\alpha = \frac{4\lambda + l - a}{2|a - \lambda|} f.$$

D'après cela,

$$Z\varepsilon$$

sera négatif si $a < \lambda$ et positif si $a > \lambda$.

Donc le mouvement du point A tend à se produire dans le sens positif si $a < \lambda$ et dans le sens négatif si $a > \lambda$, ce qui devait être, car, lorsqu'il n'y a pas de frottement, l'équilibre est instable dans le premier cas et stable dans le second.

Si au lieu de cela

$$a = \lambda,$$

l'équation (6′), bornée à sa partie principale, donnera

$$\alpha^3 = \frac{3\lambda - l}{\lambda} f\varepsilon$$

ou, en choisissant ε de façon que α soit positif,

$$\alpha^3 = \frac{3\lambda + l}{\lambda} f;$$

d'ailleurs

$$Z = -Mg\frac{l+3\lambda}{4\lambda},$$

de sorte que

$$\varepsilon Z < 0,$$

et, par suite, le mouvement du point A tend à se produire dans le sens positif, ce qui devait être puisque dans ce cas, lorsqu'il n'y a pas de frottement, la valeur $\theta = \pi$ correspond à une position d'équilibre instable.

4° Cherchons enfin la région d'équilibre dans le voisinage de $\theta = \theta_1$, ce qui suppose

$$|a| > \lambda.$$

Posons alors

$$\theta = \theta_1 - \alpha$$

avec

$$\cos\theta_1 = -\frac{\lambda}{a}$$

et où nous supposons de plus $\theta_1 < \pi$.

Si alors nous négligeons les termes en α^2, l'équation (6) devient

$$\frac{a\alpha}{\lambda}\sin^2\theta_1 - \frac{\lambda(l+3a)}{2a^2} f\varepsilon - \frac{l-a}{2\lambda} f'\varepsilon'\sin^2\theta_1 = 0.$$

On en déduit, en remplaçant $\sin\theta_1$ par sa valeur,

$$\alpha = \frac{\lambda^2(l+3a)f\varepsilon}{2a(a^2-\lambda^2)} + \frac{l-a}{2a} f'\varepsilon'.$$

On a d'ailleurs en se bornant à la partie principale, en vertu de (4) et (5),

$$X = Mg\,\frac{l+a}{4\lambda}\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{a^2}},$$

$$Z = -\,\frac{Mg(3a-l)}{4a};$$

de plus, comme

$$\cos\theta_1 = -\,\frac{\lambda}{a},$$

on a, si $a > \lambda$,

$$\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \pi.$$

On doit alors avoir, en vertu des conditions géométriques,

$$\varepsilon\varepsilon' Z X < 0,$$

mais dans ce cas

$$X > 0, \qquad Z < 0;$$

on devra donc prendre

$$\varepsilon\varepsilon' > 0,$$

et si l'on veut que α soit positif on aura

$$\varepsilon = \varepsilon' = 1,$$

ce qui conduit à

$$\alpha = \frac{\lambda^2(l+3a)f}{2a(a^2-\lambda^2)} + \frac{l+a}{2a}f'.$$

Si, au lieu de cela,

$$a < -\lambda,$$

on aura

$$0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$$

et les conditions géométriques donneront

$$\varepsilon\varepsilon' Z X > 0,$$

et dans ce cas X est positif et Z a le signe de $3a + l$,

de sorte que

$$\varepsilon\varepsilon'(3a+l) > 0.$$

Donc, si l'on veut que α soit positif, on devra prendre

$$\varepsilon' = -1, \qquad \varepsilon(3a+l) = -|3a+l|,$$

et l'on aura en définitive dans tous les cas

$$\alpha = \left|\frac{l-3a}{a}\right| \frac{\lambda^2 f}{2(a^2-\lambda^2)} - \frac{l-a}{2|a|} f';$$

la région d'équilibre s'étendra alors de $\theta_1 - \alpha$ à $\theta_1 + \alpha$. La valeur de α ne sera jamais nulle et toujours acceptable.

On remarquera de plus que si $a > 0$ on a, pour $\alpha > 0$,

$$\varepsilon' X > 0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon Z < 0,$$

ce qui fait voir que le point A tend à se déplacer dans le sens positif et le point B également, ce qui devait être puisque $\theta_1 > \frac{\pi}{2}$ et que la position d'équilibre, lorsqu'on néglige le frottement, est instable. Si au lieu de cela $a < 0$,

$$\varepsilon' X < 0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon Z \text{ [illegible] } 0,$$

puisque ε est de signe contraire à $3a+l$, tandis que Z a le même signe que cette quantité.

On en conclut que pour α positif le point A tend à se déplacer $\left(\text{puisque } \theta_1 < \frac{\pi}{2}\right)$ dans le sens positif et le point B dans le sens négatif, ce qui doit être, car, d'après ce que nous avons vu, lorsqu'il n'y a pas de frottement, la valeur $\theta = \theta_1$ correspond alors à une position d'équilibre stable.

CORRESPONDANCE.

N. — Dans le Volume des *Nouvelles Annales* pour 1890, M. R. Sondat a donné pour l'aire S du triangle OIH, relatif à un triangle donné ABC, la formule

$$16S^2 = -p^4 + 2(2R^2 + 10Rr - r^2)p^2 - r(4R + r)^3$$

et indiqué l'inégalité

$$p^4 - 2(2R^2 + 10Rr - r^2)p^2 - r(4R + r)^3 \leqq 0$$

comme condition unique d'existence du triangle lorsqu'on donne R, r et p.

M. E. Lemoine (1891, p. 44*) a établi très élégamment la formule de M. Sondat.

Il y a lieu de remarquer que l'inégalité ci-dessus suppose remplie la condition bien connue

$$R \geqq 2r,$$

et qu'on doit avoir

$$\begin{aligned} 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr} &\leqq p^2 \\ &\leqq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}; \end{aligned}$$

on a ainsi les limites du périmètre d'un triangle inscrit à un cercle donné et circonscrit à un cercle donné.

BIBLIOGRAPHIE.

Cinq études de Géométrie analytique. — Applications diverses de la théorie des matrices et de l'élimination, par *M. Stuyvaert*, docteur spécial en Mathématiques, répétiteur à l'Université de Gand.

Ouvrage couronné par l'Académie royale de Belgique (prix François Deruyts). Gand, Van Gœthem, 1908 (230 p. in-8°). Prix : 6fr.

L'Ouvrage que le savant géomètre belge vient de publier est le développement de la thèse suivante, annexée à sa dissertation inaugurale (¹):

La Géométrie, en appliquant la théorie de l'élimination entre deux équations algébriques, n'utilise guère que la condition d'existence d'une seule racine commune. Les conditions pour que les équations aient plus d'une racine commune peuvent aussi donner des résultats géométriques intéressants.

Comme son titre l'indique, le Mémoire est divisé en cinq Parties :

I. Applications géométriques de la théorie des matrices.

II. Congruences de variétés algébriques annulant des matrices.

III. La théorie des matrices dans l'espace réglé.

IV. Sur une forme doublement quadratique binaire et symétrique.

V. Quadrilatères de Steiner dans certaines courbes et surfaces algébriques.

L'évanouissement d'une matrice à l rangées et $l+1$ colonnes dont les éléments sont des formes à trois ou quatre variables homogènes représente un nombre fini de points du plan ou une courbe de l'espace. L'objet de la première étude est la détermination de l'ordre et du genre d'une telle courbe dans le cas le plus général. Ensuite, l'auteur s'occupe de quelques courbes particulières. Ces exemples montrent la fécondité de la méthode et la facilité avec laquelle on arrive à des résultats obtenus quelquefois péniblement par d'autres voies. De plus, on rencontre des rapprochements entre des courbes éloignées en apparence.

On est conduit à l'étude de telles courbes lorsque, dans la recherche d'un lieu géométrique, on doit exprimer que deux équations ont une ou plusieurs racines communes. Le cas se

(¹) *Étude de quelques surfaces algébriques.* Gand, Hoste, 1902.

présente pour la jacobienne de trois ou de cinq surfaces et pour d'autres problèmes qui sont traités d'une manière très élégante par l'auteur.

M. Stuyvaert caractérise sa méthode par les lignes suivantes, extraites de l'avant-propos, et que nous croyons utile de reproduire ici :

Qu'il s'agisse d'élimination simple ou de surélimination, le résultat conduit à l'évanouissement d'une matrice rectangulaire ou d'un déterminant. Ce mode d'écriture matérialise en quelque sorte la génération d'êtres géométriques par des formes projectives; les détails de structure d'une matrice correspondent à des propriétés de la variété qu'elle représente.

Cette notation souligne à la fois l'analogie et les différences entre le symbolisme algébrique et le langage synthétique; si ce dernier oblige de serrer de près les problèmes particuliers, le premier, par contre, ouvre aux recherches un champ plus étendu.

L'évanouissement de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_n & b_n & c_n \\ a'_n & b'_n & c'_n \end{matrix} \right\|,$$

dont les éléments sont des formes linéaires à d variables homogènes, représente une variété d'ordre *trois* à $d-3$ dimensions dans un espace linéaire à $d-1$ dimensions. Si les éléments sont fonctions de trois variables homogènes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, cette variété appartient à une congruence. Le cas où ces paramètres entrent au premier degré est étudié complètement, de même que le cas des cubiques gauches ayant cinq bisécantes communes. Ceci fait l'objet de la deuxième étude.

La troisième étude s'occupe du cas où les éléments de la matrice sont fonctions des coordonnées de la droite. Les cas où la matrice a l rangées et $l+3$, ou $l+2$, ou $l+1$, ou l colonnes sont successivement étudiés.

Dans la quatrième étude, l'auteur s'occupe d'une certaine forme de l'équation de l'involution du troisième ordre et du premier rang. Cela le conduit à l'étude du système de deux coniques et ensuite de la surface du quatrième ordre à cubique double.

La première partie de la cinquième étude a paru ici même en 1905. Elle se rapporte aux courbes et aux surfaces quadrillées. Cette dernière étude est complétée par l'étude de la représentation graphique des fonctions. Cette partie se rapporte à des recherches de M. Massau.

Cette analyse beaucoup trop courte du Mémoire de M. Stuyvaert montre la fécondité et la souplesse de la méthode employée par ce mathématicien. En terminant son Rapport pour le *prix Deruyts* à l'Académie royale de Belgique, M. Neuberg ajoute : *Il est à souhaiter que l'Académie reçoive, pour les périodes suivantes du prix François Deruyts, des Mémoires de la même importance, montrant que les Belges cultivent la Géométrie avec un succès remarquable*. Cette opinion du savant professeur de l'Université de Liége est très flatteuse pour M. Stuyvaert.

LUCIEN GODEAUX.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Marseille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un corps solide, qui a un point fixe* O, *est formé d'une tige* OA *perpendiculairement à laquelle est fixé un disque circulaire pesant et homogène dont le centre est en* A. *On néglige la masse de la barre* OA. *La distance* OA *est égale à la moitié des rayons* R *du disque. Trouver le mouvement de ce système, sachant que primitivement le disque tourne autour de* OA *avec une vitesse angulaire égale à* $\sqrt{\frac{2g}{R}}$ *pendant que la barre, qui est d'abord horizontale, est lancée horizontalement avec une vitesse angulaire égale aussi à* $\sqrt{\frac{2g}{R}}$.

On fera pour la commodité du calcul

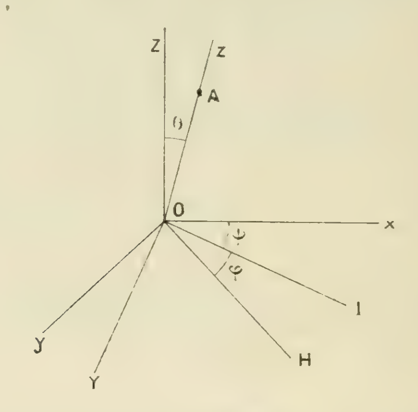
$$\frac{2g}{R} = \omega^2;$$

on remarquera que l'ellipsoïde d'inertie relatif au point O *se réduit à une sphère, de sorte qu'on a*

$$A = B = C = \frac{1}{2} MR^2.$$

SOLUTION.

On prend trois axes fixes dont l'axe OZ est dirigé vers le haut et trois axes mobiles dont l'axe Oz coïncide avec OZ.



Soit OI l'intersection des plans XY et xy. On définit la position du solide par les trois angles d'Euler.

Le théorème des forces vives donne, en faisant

$$A = \frac{MR^2}{2},$$

$$\sin^2\theta \frac{d\psi^2}{dt^2} - \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{R}(\alpha - \cos\theta).$$

Le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à OZ donne

$$\sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{R}}(\beta - \cos\theta).$$

Les données initiales fournissent pour les constantes α et β la valeur 1.

Par élimination on est conduit à

$$\omega\, dt = \frac{\sin\theta\, d\theta}{(1-\cos\theta)\sqrt{\cos\theta}},$$

qui s'intègre en posant

$$\cos\theta = u^2,$$

et l'on en tire

$$\frac{e^{\omega t}-1}{e^{\omega t}+1} = \sqrt{\cos\theta},$$

par où l'on voit que, t croissant indéfiniment, θ tend vers zéro, et OA d'abord horizontal se relève en tendant vers la verticale.

On a ensuite

$$2\psi = \omega t + 2 \operatorname{arc\,tang} e^{\omega t},$$

ou sensiblement

$$\psi = \pi$$

pour t infini.

On a enfin

$$\varphi = \psi.$$

Épreuve pratique. — *Une voûte en arc de cercle est formée par un système articulé ainsi constitué :*

On trace deux arcs de cercle concentriques ; l'arc intérieur a 10^{m} *de rayon, l'arc extérieur a* 12^{m} *de rayon. L'arc intérieur a une ouverture de* 90°. *On partage l'arc intérieur en huit parties égales dont les cordes donnent les tiges de l'arc intérieur. Les sommets de l'arc extérieur sont sur les perpendiculaires élevées au milieu des tiges de l'arc intérieur. On joint ces sommets entre eux et aux sommets de l'arc intérieur par des tiges. On a ainsi un système de triangles.*

Les extrémités de l'arc intérieur reposent sur deux appuis de niveau.

Sur les sommets de l'arc extérieur on applique des poids égaux P.

Trouver les tensions des tiges par un graphique.

(Juillet 1908.)

Montpellier.

Épreuve écrite. — *Un hémisphère creux, infiniment mince, rigide, homogène et pesant, glisse sans frottement sur un plan horizontal fixe. Étudier son mouvement en supposant qu'à l'instant initial l'angle formé par l'axe de symétrie du solide avec la verticale ascendante soit égal à* 30° *et qu'au même instant le corps soit animé d'un mouvement de rotation autour de la verticale passant par son centre de gravité.*

On prendra le rayon de l'hémisphère et sa densité égaux à l'unité.

Épreuve pratique. — *Un fil rigide, circulaire, infiniment mince, est fixe dans un plan vertical. En un point* A *du fil on abandonne sans vitesse un point pesant* M. *Ce point tombe suivant la verticale du point* A, *vient choquer le fil en* B, *puis en* C, *et ainsi de suite. Le fil et le point sont parfaitement élastiques.*

Peut-on choisir le point A *de manière que le point* C *lui soit diamétralement opposé sur le fil ? Cette condition étant réalisée, quel sera le mouvement du point* M ?

(Juillet 1908.)

Paris.

Épreuve théorique. — *Deux roues identiques, homogènes et pesantes, de masse* M *et de rayon* R, *tournent librement autour de leurs centres* C *et* C_1 *reliés par deux tiges identiques* CA *et* C_1A, *homogènes et pesantes, de masse* m *et de longueur* $2l$, *qui sont articulées en* A. *Le système est abandonné dans le plan vertical* xOy *avec des vitesses contenues dans ce plan, les deux roues reposant sur la droite fixe inclinée* Ox, parfaitement lisse.

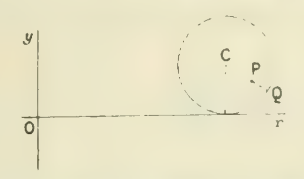
1° *Calculer le mouvement du système, en admettant que les deux roues restent en contact avec* Ox.

2° *Chaque roue pouvant se soulever au-dessus de* Ox, *quelle restriction est imposée aux conditions initiales pour que les deux roues restent en contact avec* Ox?

3° *Calculer le mouvement du même système en supposant, non plus que* Ox *est parfaitement lisse, mais que les deux roues sont assujetties à rouler* sans glisser *sur* Ox. *On admettra, pour traiter cette troisième question, que les roues restent en contact avec* Ox.

Nota. — *On pourra prendre comme paramètres l'abscisse du milieu de* CC_1, *l'angle* $\theta = \frac{\widehat{CAC_1}}{2}$ *et les angles dont tournent les deux roues.*

Épreuve pratique. — *Un disque circulaire plein, homogène, pesant* S, *de rayon égal à* 10cm *et de masse* m, *porte*



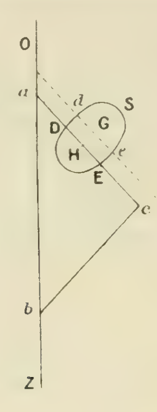
au milieu d'un de ses rayons CQ *une masse* P, *égale à* m, *qui lui est invariablement liée. Le solide* S *est abandonné sans vitesse dans le plan vertical* xOy *et repose sur une droite horizontale fixe* Ox *parfaitement lisse. L'angle de la position initiale de* CP *avec la verticale descendante étant de* 7°30′, *calculer les petits mouvements de* S *en regardant cet angle comme un infiniment petit. Déterminer, en particulier, la période des oscillations de* CP *autour de* C. (Juillet 1907.)

I. Épreuve théorique. — *Un triangle abc isoscèle et rectangle formé de trois tiges pesantes, homogènes et de même densité, a les deux sommets a et b de son hypoténuse fixés sur la même verticale* Oz. *Le triangle abc tournant librement autour de cet axe fixe* Oz, *un solide de révolution* S, *homogène et pesant, a deux de ses points* D *et* E *fixés sur la tige ac, qui est parallèle à son axe de figure ed et tourne librement autour de cette tige ac. Le centre de gravité* G *de* S *se projette sur ac au milieu* H *de ac.*

1° *Calculer le mouvement du système abandonné dans*

des conditions initiales quelconques à l'action de la pesanteur.

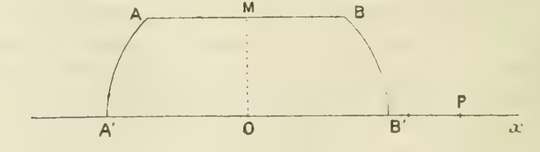
2° *Dans le cas particulier où* G *coïncide avec* H *et où* D *et* E *coïncident respectivement avec le milieu de* aH *et de*



cH, *quel est le mouvement du système? Quelles sont les réactions qui s'exercent sur* S *en* D *et* E *et sur le triangle* abc *en* a *et* b?

Notation. — *On pourra définir la position du système par l'angle* α *du plan* abc *avec un plan fixe* zOx *et par l'angle* β *du plan* abc *et du plan* acG. *On représente par* M *la masse totale du triangle* abc, *par* l *la longueur* ac, *par* μ *la masse de* S, *par* λ *la distance* GH, *par* C *le moment d'inertie de* S *autour de son axe de figure, et par* A *son moment d'inertie autour de* GH.

II. Épreuve pratique. — *On considère un corps de révolution* S *dont la méridienne se compose d'un segment de*



droite AB *parallèle à l'axe de révolution* Ox *et de deux arcs de cercle* AA', BB' *ayant comme centre la projection*

de O *sur* Ox *du milieu* M *de* AB. *La distance* OM *ou* l *est égale à la moitié de* AB.

Le corps S *étant supposé plein et homogène, de densité* 1, *calculer :* 1° *le potentiel des attractions newtoniennes exercées par* S *sur une masse* P *égale à l'unité et située sur* Ox, *à la distance* x *de* O;

2° *La résultante de ces attractions.*

On traitera d'abord le cas où P *est extérieur à* S, *puis le cas où* P *est intérieur à* S. (Octobre 1907.)

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Théorème de Coriolis. Application à l'étude des mouvements horizontaux à la surface terrestre.*

II. *Un store a la forme d'une surface rectangulaire pesante, homogène, parfaitement flexible, d'épaisseur négligeable. Le bord supérieur du store est horizontal et fixé à la paroi d'un mur vertical ; le bord inférieur s'attache à la surface d'un cylindre de révolution homogène et pesant, d'axe horizontal, autour duquel s'enroule le store. Sous l'action du poids le cylindre tombe et le store se déroule en s'appliquant sur le mur. Étudier le mouvement qui se produit pendant la phase de déroulement. On suppose qu'il y a une résistance verticale d'intensité constante appliquée au centre de gravité du cylindre.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un corps solide pesant est muni de deux axes de suspension parallèles ; le centre de gravité est situé entre les deux axes. En oscillant autour du premier, sous l'action de la pesanteur, il fait, en* 10 *minutes,* 488 *oscillations ; autour du second il en fait* 504 *dans la même période. La distance des deux axes est égale à* $1^{m},60$. — *Calculer la distance du centre de gravité à chacun des axes et le rayon de gyration par rapport à un axe parallèle aux précédents, mené par le centre de gravité.*

(Juin 1908.)

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

Lille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Théorie des caractéristiques mécaniques.*

Relations dynamiques entre un moteur et les outils qu'il actionne.

II. *Étude des freins placés sur un arbre de la transmission.*

On traitera seulement les questions suivantes :
Équilibre dynamique d'une roue freinée;
Effort total de freinage;
Transmission de l'effort de freinage au châssis.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère une voiture à chaînes ayant les caractéristiques suivantes :*

Poids total : $P = 1200^{kg}$, dont 720^{kg} sur l'arrière.

Nombre de dents des roues de chaîne	35
» des pignons de chaîne	20
» de la couronne du différentiel	39
» du pignon d'attaque	26
» des engrenages de l'arbre secondaire de la boîte des vitesses	60, 48, 40, 35
Nombre de dents des engrenages correspondants de l'arbre primaire	16, 28, 36, 41
Rendement de la transmission	$\rho = 0,7$
Coefficient normal de traction	$f_1 = 0,025$
Surface de front de la voiture	$S = 2^{m^2}$

Variations du couple moteur moyen avec le nombre de tours : son maximum a lieu à 400 *tours; si l'on représente ce maximum par* 100, *les valeurs de ce couple moyen sont respectivement représentées :*

A 800 tours par 83
A 1000 tours par 70
A 1600 tours par 45

1° *Déterminer le diamètre des roues motrices de manière que la voiture fasse 60^{km} à l'heure en quatrième vitesse, lorsque le moteur tourne à sa vitesse normale qui est de* 800 *tours à la minute.*

2° *Déterminer la puissance normale du moteur (c'est-à-dire celle qu'il fournit à* 800 *tours) de façon que la voiture puisse faire* 75^{km} *à l'heure en palier.*

3° *Calculer l'accélération de démarrage qu'on obtient en première vitesse en supposant que la vitesse du moteur s'abaisse à* 400 *tours pendant l'embrayage.*

4° *Trouver sur quelle pente la voiture pourra atteindre, à la descente, la vitesse de* 120^{km} *à l'heure.*

(Juillet 1908.)

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE PHYSIQUE ET EXPÉRIMENTALE.

Paris.

Épreuve théorique. — 1° *Rôle et propriétés générales des couples d'éléments cinématiques. Donner quelques exemples.*

2° (*Question facultative.*) *Sur la résistance des matériaux. Flexion simple.*

Épreuve pratique. — *Une charge roulante, composée de trois essieux de même poids, parcourt une poutre droite.*

1° *Déterminer les moments fléchissants maximums (méthode de Leman).*

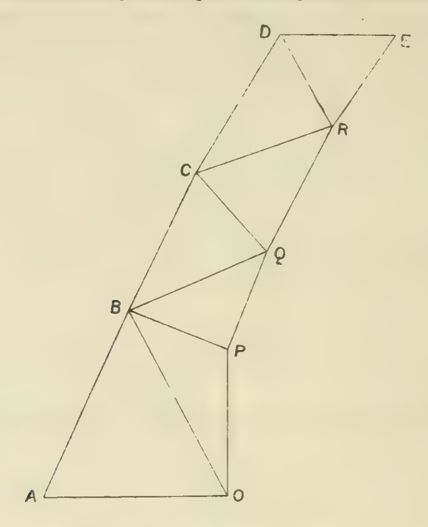
2° *Déterminer les efforts tranchants maximums (on suppose ici que l'effort tranchant maximum dans chaque section a lieu quand le premier essieu passe sur cette section).* (Juillet 1907.)

I. Épreuve théorique. — *Profils conjugués. Engrenages. Exemples.*

Partie facultative : Résistance des matériaux. Torsion.

II. Épreuve pratique. — *Les points A et O étant fixes sur*

une même horizontale et la tige OB *étant verticale, on considère le système formé par la tige* AB *et les triangles*



OBP, PBQ, QBC, QCR, RCD, RDE, *dont les côtés sont des tiges rigides. Aux nœuds* B, C, D, E, P, Q, R *s'exercent des charges verticales égales. On demande de construire les tensions de toutes les tiges et de distinguer celles qui travaillent à l'extension et celles qui travaillent à la compression.* (Octobre 1907.)

CERTIFICAT DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

Paris.

Épreuve théorique. — *Intégration approchée ou exacte, par des polynomes et pour une infinité de formes de la section, des équations aux dérivées partielles de l'écoulement uniforme des fluides dans les tubes fins mouillés par ces fluides : application de la méthode générale à un tube de section carrée.*

Épreuve pratique. — *A travers une section triangulaire équilatérale de hauteur h, et par rapport à deux axes rectangulaires des y et des z dont l'un (celui des y) est pris suivant la base du triangle, et l'autre (celui des z) suivant la hauteur, les vitesses de régime uniforme d'un fluide à l'état d'écoulement bien continu sont*

$$u = \rho \frac{gI}{4\varepsilon h} z[(h - z)^2 - 3y^2],$$

où I *est la* pente motrice, *indépendante* (*comme* ρ, *g et* ε) *de y et de z.*

On demande de calculer le rapport de la vitesse maxima u_m *à la vitesse moyenne u.*

(Juillet 1907.)

I. Épreuve théorique. — *Équation aux dérivées partielles du mouvement d'une nappe d'eau presque horizontale infiltrée dans le sol perméable homogène, et conditions relatives au contour de cette nappe.*

Application au régime d'été d'une source.

II. Épreuve pratique. — 1° *Le débit d'été* Q *de la source d'Armentières (l'une des sources de la Vanne qui alimentent Paris) est exprimé en millions de mètres cubes fournis par mois, après un nombre entier ou fractionnaire t de mois comptés à partir de la cessation des pluies d'hiver, par la formule*

$$Q = Ae^{-\alpha t} + Be^{-9\alpha t},$$

où le coefficient α *de tarissement a la valeur* 0,037 *et où les deux coefficients* A, B *sont, après quelques hivers moyennement pluvieux,* A = 1,14, B = 1,23. *On demande combien de millions de mètres cubes donnera la source, dans cette hypothèse, durant les six mois de la saison sèche, c'est-à-dire entre les limites* $t = 0$, $t = 6$.

On prendra $\log \log e = \bar{1},63778$.

(Octobre 1907.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2085.

(1907, p. 528.)

Soient U *et* V *deux quadriques ayant en commun une droite* γ*; soit* β *une génératrice de* U *du même système que* γ*, soit* α *une génératrice de* V *du même système que* γ*; un plan passant par* γ *contient encore une génératrice* x *de* U*, une génératrice* y *de* V*; les deux plans* (x, β) *et* (y, β) *se coupent suivant une droite* z*: quel est le lieu de cette droite lorsqu'on fait varier le plan mené par* γ*?*

(G. F.)

SOLUTION

Par M. M. Têtu.

Les deux faisceaux de plans d'arêtes α, β sont respectivement homographiques au faisceau d'arêtes γ. Donc, l'intersection de deux plans correspondants a pour lieu une quadrique passant par α et β. De plus, cette quadrique passe par l'intersection des deux génératrices x et y, dont le lieu est la cubique gauche commune aux deux quadriques U et V, laquelle rencontre d'ailleurs en deux points chacune des droites α et β. La quadrique lieu est ainsi bien définie.

M. Têtu.

Autres solutions de MM. Bros et Tabacoff.

2087.

(1908, p. 48.)

Intégrer l'équation différentielle

$$A(x)y'^2 - A'(x)yy' + C(x)y^2 = H(x),$$

avec la condition

$$H = CA - \frac{A'^2}{4}.$$

A et C sont des fonctions arbitraires de x. A' est la dérivée de A.

(Pierre Favre.)

SOLUTION

Par M. Parrod.

On a

$$y' = \frac{A'y \pm 2\sqrt{-H(y^2 - A)}}{2A}.$$

Posons

$$y = \frac{1-t^2}{2t}\sqrt{A},$$

d'où

$$\sqrt{y^2 - A} = \frac{1-t^2}{2t}\sqrt{A}$$

et

$$y' = -\frac{(1-t^2)t'}{2t^2}\sqrt{A} + \frac{1-t^2}{4t}\,\frac{A'}{\sqrt{A}}.$$

Portons ces valeurs dans l'expression de y' et simplifions; il vient

$$\frac{t'}{t} = \frac{2\sqrt{-H}}{A};$$

donc

$$\log t = 2\int\frac{\sqrt{-H}}{A}\,dx.$$

Autre solution par M. J. Rose.

2088.

(1902, p. 48.)

La tangente et la normale en un point M *d'une ellipse de centre* O *rencontrent le grand axe en* T *et* N : 1° *la perpendiculaire abaissée de* T *sur* OM *enveloppe une ellipse;* 2° *la parallèle menée par* N *à* OM *est normale à une ellipse fixe.*

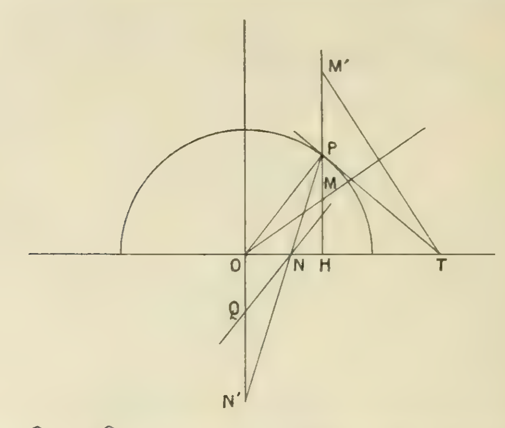
(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Tètu.

1° Soit P l'intersection de la perpendiculaire abaissée de M sur le grand axe avec le cercle directeur; soit M' son inter-

section avec la perpendiculaire abaissée de T sur OM. Les



angles $\widehat{POH}$, $\widehat{MOH}$ étant respectivement complémentaires de $\widehat{PTH}$, $\widehat{M'TH}$, on a

$$\frac{M'H}{PH} = \frac{PH}{MH} = \frac{a}{b}.$$

Donc l'enveloppe de TM′ est le lieu du point M′, qui est une ellipse.

2° Considérons l'ellipse comme projection de son cercle principal ; la normale en M est la projection de la droite PNN′, et l'on a

$$\frac{N'P}{N'N} = \text{const.}$$

Menons par N la parallèle à OP : NQ ; on a

$$\frac{NQ}{PO} = \text{const.},$$

d'où

$$NQ = \text{const.}$$

Donc cette droite enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements, donc sa projection enveloppe une développée d'ellipse.

Autres solutions par MM. Betto, Bouvaist, Bratu, Bros, Gaedecke, Lez, Retali, J. Rose.

2091.

(1908, p. 96.)

Le nombre n étant supposé impair, démontrer que, si l'on évalue la quantité $\frac{\sin nx}{\sin x}$ en fonction de $\cos x$, l'expression obtenue est un produit de deux facteurs rationnels. Que représente chacun de ces facteurs ?

(G. F.)

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

$f(\cos x) = \frac{\sin nx}{\sin x}$ est, quel que soit n, une fonction rationnelle de $\cos x$; elle s'annule pour $x = \frac{K\pi}{n}$, K prenant les $n-1$ valeurs $1, 2, \ldots, n-1$.

Si n est impair, les $n-1$ racines de

$$f(\cos x) = 0$$

sont deux à deux opposées, puisque

$$\cos\frac{p\pi}{n} = -\cos\frac{(n-p)\pi}{n} \qquad (p < n).$$

$f(\cos x)$ est par suite un produit de deux facteurs rationnels $f_1(\cos x)$ et $f_2(\cos x)$, le premier ayant pour racines

$$\cos\frac{\pi}{n}, \quad \cos\frac{2\pi}{n}, \quad \ldots, \quad \cos\frac{n-1}{2n}\pi,$$

le second

$$\cos\frac{n+1}{2n}\pi, \quad \ldots, \quad \cos\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

QUESTION.

2114. Dans un tétraèdre orthocentrique SABC, on désigne par a, b, c, a', b', c' les cosinus des dièdres suivant BC, CA, AB, SA, SB, SC; on connaît la relation

$$aa' = bb' = cc' = \mathrm{M}:$$

démontrer la formule

$$\frac{1}{\mathrm{M}^2 + a'b'c'} = \frac{1}{a'(a' + b'c')} + \frac{1}{b'(b' + c'a')} + \frac{1}{c'(c' + a'b')}.$$

Si l'on donne a, b, c, on a une équation du troisième degré en M, ayant ses racines réelles; le problème est possible sous la condition $abc > 0$, et il a alors trois solutions (on peut avoir $b = 0$, $c = 0$; il y a alors indétermination).

(G. Fontené.)

ERRATA.

Dans le Volume pour 1890, p. 556 et 623, *lire* question 1594 *au lieu de* question 1593.

Dans le *Tableau de correspondance entre les questions et leurs solutions*, la question 1593 est de même indiquée à tort comme ayant reçu une solution en 1890, p. 556.

Page 479 du présent Tome, question 2102 : P désigne le point fixe dont il est question au 1°.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

(TOME VIII, 4e SÉRIE).

La classification adoptée est celle de l'Index du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.*

A. — Algèbre élémentaire; théorie des équations algébriques et transcendantes; groupes de Galois; fractions rationnelles; interpolation.

E. — Intégrales définies et en particulier intégrales eulériennes.

I. — Arithmétique et théorie des nombres; analyse indéterminée; théorie arithmétique des formes et des fonctions continues; division du cercle; nombres complexes, idéaux, transcendants.

K. — Géométrie et Trigonométrie; géométrie analytique; géométrie projective et descriptive; perspective.

L. — Coniques, quadriques et variétés du second degré.

M. — Courbes, surfaces et variétés algébriques; courbes, surfaces et variétés transcendantes spéciales.

N. — Complexes et congruences; connexes; systèmes de courbes, de surfaces et de variétés; géométrie énumérative.

O. — Géométrie infinitésimale et géométrie cinématique; applications géométriques du Calcul différentiel et du Calcul intégral à la théorie des courbes, des surfaces et des variétés; quadrature et rectification; courbure; lignes asymptotiques, géodésiques, lignes de courbure; aires; volumes; surfaces minima; systèmes orthogonaux.

P. — Transformations géométriques; homographie; homologie et affinité; corrélation et polaires réciproques; inversion; transformations birationnelles et autres.

Q. — Géométries diverses; généralités sur la géométrie à n dimensions; géométrie non euclidienne; *Analysis situs;* géométrie de situation.

R. — Mécanique générale; cinématique; statique comprenant les centres de gravité et les moments d'inertie; dynamique; mécanique des solides; frottement; attraction des ellipsoïdes.

Certificats d'études supérieures des Facultés des Sciences.

Questions de concours.

Correspondance.

Bibliographie.

Divers.

Questions proposées.

Solutions de questions proposées.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS ET DES NOMS CITÉS
(TOME VIII, 4e SÉRIE).

Les noms des AUTEURS sont en PETITES CAPITALES.
Les noms *cités* sont en *italiques*.

40972 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

